

# Veranstaltungsplanung mit Multiple-Knapsack-Methoden

Diplomarbeit  
bei Prof. Dr. Martin Grötschel

vorgelegt von Biliana Boeva  
am Fachbereich Mathematik  
der Technischen Universität Berlin

Fach	Kursname	Uhrzeit ab	Mo. 29.9.	Di. 30.9.	Mi. 1.10.	Do. 2.10.
Antike Geschichte	Das Orakel von Delphi		10.30-			
Antike Geschichte	Die 12 Arbeiten des Herakles			9-10 11-12		
Antike Geschichte	Ein Morgen in einem ägyptischen Tempel		10-12	10-12	10-12	10-12
Antike Geschichte	Marcus - ein Schüler in Rom		10-11 11.30-			
Geschichte	Schatzsuche im Universitätsarchiv				9.30-11.30	9.30-11.30
Biochemie	Experimentalvorlesung		10-			
Biologie	Die Welt auf unserem Teller		10-12			
Biologie	Von guten und bösen Mikroben		10.30-12	10.30-12		
Biologie	Wie die Honigbiene die Umwelt schützt		10-12	10-12	10-12	10-12
Chemie	Chemie - wenn Farben sich verändern		9-10.30 11-12.30	9-10.30 11-12.30	9-10.30 11-12.30	9-10.30 11-12.30
Chemie	Leben im Wassertropfen		9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30
Physik	PhysLab - Einführungsexperimente		9.30-11.30 11.30-13.30	9.30-11.30 11.30-13.30	9.30-11.30 11.30-13.30	9.30-11.30 11.30-13.30
Physik	PhysLab - Schwimmen, Schweben, Sinken		9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30
Sprache	Versteht mich der Computer?			9.30-11.30	9.30-11.30	9.30-11.30
Sprache	Wie die Sprache tönt			10.30-12		
Tiermedizin	Ein Tier entsteht!				10-11	
Tiermedizin	Führung durch die anatomische Sammlung			11-12	10-11	

VON - BIS    Zeitintervall des jeweiligen Kurses

zur Erlangung des akademischen Grades  
Diplom-Wirtschaftsmathematikerin  
(Dipl.-Math. oec.)

23.11.2008

## Eidesstattliche Erklärung

Die selbständige und eigenhändige Ausfertigung versichert an Eides statt.

Berlin, den 23.11.2008

Biliana Boeva

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Die Kinder-Universitäten</b>	<b>2</b>
2.1	Konzept und Ziele . . . . .	2
2.2	Die FU-Kinder-Uni . . . . .	4
2.3	Diskussion des Anmeldeverfahrens der FU-Kinder-Uni . . . . .	7
2.4	Aufgaben und Ziele der Arbeit . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Modellierung des Zuordnungsproblems der FU-Kinder-Uni</b>	<b>11</b>
3.1	Vorgaben des Anmeldeprozesses . . . . .	11
3.2	Randbedingungen/Zielfunktion . . . . .	12
3.3	Notation . . . . .	12
3.4	Das KIP-Modell . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>16</b>
4.1	0/1-Single-Knapsack-Problem . . . . .	16
4.1.1	Greedy-Algorithmen . . . . .	17
4.1.2	Dynamische Programmierung . . . . .	18
4.1.3	PTAS/FPTAS . . . . .	19
4.1.4	Knapsack-Probleme mit Konflikten . . . . .	20
4.2	0/1-Multiple-Knapsack-Problem . . . . .	21
4.2.1	Branch-and-Bound-Algorithmen . . . . .	22
4.2.2	Dynamische Programmierung . . . . .	30
4.2.3	Approximationsalgorithmen . . . . .	31
4.2.4	PTAS . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Analysen</b>	<b>34</b>
5.1	Testdaten . . . . .	34
5.2	Zuordnungen in Abhängigkeit der Zielfunktionssetzung . . . . .	36
5.3	Sensitivitätsanalysen . . . . .	39
5.3.1	Einzelbetrachtung-Termine . . . . .	39
5.3.2	Kapazitätserhöhung-Analyse . . . . .	42
5.3.3	Single-Knapsack-Schranke . . . . .	47
5.4	Konfliktanalyse von Lösungssystemen . . . . .	50
5.4.1	Hintergrund/ Probleme . . . . .	50
5.4.2	Beispiel-FU-Kinder-Uni . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Zuteilung 2008</b>	<b>54</b>
6.1	Multikriterielle Optimierung . . . . .	54
6.2	Ergebnisse 2008 . . . . .	56
6.3	Konfliktanalyse der Zuordnung . . . . .	59
6.4	Fazit 2008 . . . . .	62

<b>7</b>	<b>Online Planung-Konzept</b>	<b>64</b>
7.1	Konzept . . . . .	64
7.1.1	Funktionalität/Informationsausgabe . . . . .	65
7.1.2	Organisation der Optimierung . . . . .	71
7.2	Software-Aspekte . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung der Arbeit</b>	<b>77</b>
<b>9</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>78</b>
<b>10</b>	<b>Implementationen</b>	<b>V</b>



## 1 Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist am Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik in Berlin durch den Auftrag einer konkreten Planungsaufgabe der Abteilung Forschung (VI LNDW) der FU-Berlin entstanden. Im Rahmen der Organisation der FU-Kinder-Uni-Veranstaltung ist das Ziel die wissenschaftliche Analyse der Planungsaufgaben, die Optimierung durch die Entwicklung von mathematischen Lösungen und die Erstellung eines Konzeptes für ein Praxistool.

Durch die vorliegende Arbeit wird erstmalig eine ausführliche Modellierung sämtlicher Aspekte der Planung des Anmeldeprozesses der Kinder-Uni entwickelt. Es werden Planungsbedingungen und Ziele in einem mathematischen Modell formalisiert. Das resultierende Zuordnungsmodell stellt eine bestimmte mathematische Problemklasse dar, die zu den „Knapsack-Problemen“ gehört. Es handelt sich dabei um das „Multiple-Knapsack-Problem“ (kurz MKP). Durch die Ergebnisse dieser Arbeit werden Hilfsmittel und entsprechende Analysen, für eine optimierte Durchführung der Organisation dieser Veranstaltung, dem Koordinator der FU-Kinder-Uni bei der Arbeit zur Verfügung gestellt.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Eine Vorstellung der zugrunde liegenden Veranstaltungsart wird im Kapitel 2 gegeben. Außerdem werden dort der aktuelle Ablauf der Planung der FU-Kinder-Uni und das daraus resultierende Zuordnungsproblem beschrieben. Anschließend wird die ursprüngliche Vorgehensweise der Planung bewertet und die Aufgaben und Ziele dieser Arbeit ausführlicher vorgestellt. Das Kapitel 3 gibt eine detaillierte Beschreibung und mathematische Modellierung des Kinder-Uni-Problems unter der Berücksichtigung der relevanten Parameter und Zielstellungen als ein lineares ganzzahliges Multiple-Knapsack-Problem mit Nebenbedingungen. Nach einem allgemeinen Überblick über die theoretischen Grundlagen der Knapsack-Probleme im Kapitel 4, werden die numerischen Ergebnisse mit den Eingabedaten von 2007 und alle durchgeführten Analysen im Kapitel 5 vorgestellt. Im Kapitel 6 wird die Anwendung des Modells unter realen Bedingungen in 2008 beschrieben. Das entwickelte Konzept für eine Einbettung des Optimierungsansatzes im Anmeldeprozess wird im Kapitel 7 präsentiert. Kapitel 8 enthält die Zusammenfassung und die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit. Die Literaturübersicht ist im Kapitel 9 enthalten und alle Skripte zu den Implementationen sind im Kapitel 10 angefügt.

Es sei an dieser Stelle die Voraussetzung getroffen, dass der Leser Vorkenntnisse für lineare/kombinatorische Optimierung und die Komplexitätstheorie mitbringt. Es sei insbesondere auf die Vorlesungsskripte ADM1 [Gro2003] und ADM2 [Gro2004] verwiesen.

## 2 Die Kinder-Universitäten

Kinder-Universitäten als ein Kommunikationsmittel, um die Wissenschaft auch den jungen Mitgliedern unserer Gesellschaft etwas näher zu bringen, sind mittlerweile ein wichtiger Bestandteil der Universitätsveranstaltungen. Die Idee, Professoren und Kinder zusammen zu bringen, wird erfolgreich an ca. 100 Hochschulen in Deutschland, Österreich, der Schweiz, Italien, Slowakei, Kolumbien, England und Liechtenstein durchgeführt. Inzwischen veranstalten auch einige Fachhochschulen und Musikhochschulen eigene Kinder-Universitäten.

Angefangen hat alles im Jahr 2001. Damals fand an der Universität Innsbruck als erste Universität im deutschsprachigen Raum die „Junge Uni“ statt. Der Anlass für die Veranstaltung unter dem Motto „Wissenschaft für junge Menschen“, war das 10-jährige Jubiläum der Auffindung der Gletschermumie -“Ötzi“. Vorlesungen für Kinder waren einmal pro Semester auch in den Jahren von 1992 bis 1996 an der Universität Münster angeboten worden, dies aber nicht unter den Namen "Kinder-Uni". Das bundesweit einzigartige Projekt, die Kinder-Uni, startete in Deutschland am 04.06.2002, und wurde von der Eberhard-Karls-Universität Tübingen gemeinsam mit den Redakteuren und Erfindern der Kinder-Uni Ulla Steuernagel und Ulrich Janssen von der Tübinger Lokalzeitung „Schwäbisches Tagblatt“, organisiert. Ulla Steuernagel meinte zu Beginn der Veranstaltung: „Und so erblickt nun im Jahre 525 nach der Universitätsgründung eine erste „Kinderuni“ das Licht der Tübinger Welt“.

Die größte Kinder-Universität ist die Kinder-Uni Wien mit 3500 teilnehmenden Kindern und 380 Veranstaltungen. Die Aktivität einzelner Kinder-Unis ist gewachsen und beschränkt sich nicht nur auf die Durchführung von kindgerechten Vorlesungen. Es wurden inzwischen auch einige Bücher, die Vorlesungsinhalte zusammenfassen, veröffentlicht.

### 2.1 Konzept und Ziele

Dem Kinder-Uni-Konzept wurde 2005 der Descartes-Preis der EU in der Kategorie Wissenschaftskommunikation erteilt.

Die Kinder-Uni wird für Kinder im Alter zwischen 8 und 12 Jahren angeboten. Eine Ausnahme ist die Universität Innsbruck, die auch interaktive Workshops für Jugendliche organisiert. Seit 2007 bietet auch die JuniorUni Graz Veranstaltungen für Jugendliche im Alter zwischen 10 und 18 Jahren an. Die meisten Kinder-Universitäten werden in Form von Vorlesungsfolgen veranstaltet. Die Veranstaltungen finden von einmal im Jahr bis jede Woche statt. Das Programmangebot der Projekte und Termine unterscheidet sich an den einzelnen Universitäten und Fachhochschulen. Die Vorlesungen und Veranstaltungen werden dabei spannend und interessant vorbereitet. Themen wie „Ein Tier entsteht!“, „Essen und Trinken im Alten Ägypten“, „Meteorologische Extremereignisse“, „Chemie-wenn sich Farben verändern“ sind solche, die die Kinder neugierig machen und ihnen einige Zusammenhänge der Welt erklären. Vermittelt wird dies durch Experimente, wissenschaftliche Rätsel oder Versuche, bei denen die Kinder selber mitmachen können. Bei diesem ersten Kontakt mit der akademischen Welt wird die Wissenschaft den Kindern altersgerecht vermittelt. Die Kurse sollen den Kindern möglichst viel Spaß machen.



Abbildung 1: Kinder-Universitäten

Wie beim Projekt Tübinger-Kinder-Uni, ist das Ziel, die Wahrnehmung der Uni als „offene Institution, mit der man reden kann“ (Universitätsrektor d. Universität Tübingen,

E. Schaich). Im Mittelpunkt steht für die Unis das Erfahren der Interessen der jungen Menschen und andererseits, ihre Interesse durch einen ersten Zugang zu den angewandten Wissenschaften zu wecken und sie vielleicht als zukünftige Studierende zu gewinnen.

## 2.2 Die FU-Kinder-Uni

In Berlin finden die FU-Kinder-Uni, die Humboldt-Kinder-Uni, Kinder-Uni TU und Kinder-Uni Lichtenberg statt.



Abbildung 2: Logo der FU-Kinder-Uni

Die FU-Kinder-Uni findet einmal im Jahr eine Woche lang statt. Sie wird für Grundschulkindern der 2. bis 6. Klasse veranstaltet. Das kompakte Angebot der Veranstaltung umfasst aktuell 17 verschiedene Kurse an 58 Terminen. Einen Überblick gibt der abgebildete Stundenplan:

Fach	Kursname	Uhrzeit ab	Mo. 29.9.	Di. 30.9.	Mi. 1.10.	Do. 2.10.
Antike Geschichte	Das Orakel von Delphi	10.30-				
Antike Geschichte	Die 12 Arbeiten des Herakles			9-10 11-12		
Antike Geschichte	Ein Morgen in einem ägyptischen Tempel	10-12		10-12	10-12	10-12
Antike Geschichte	Marcus - ein Schüler in Rom	10-11 11.30-				
Geschichte	Schatzsuche im Universitätsarchiv				9.30-11.30	9.30-11.30
Biochemie	Experimentalvorlesung	10-				
Biologie	Die Welt auf unserem Teller	10-12				
Biologie	Von guten und bösen Mikroben	10.30-12		10.30-12		
Biologie	Wie die Honigbiene die Umwelt schützt	10-12		10-12	10-12	10-12
Chemie	Chemie - wenn Farben sich verändern	9-10.30 11-12.30	9-10.30 11-12.30	9-10.30 11-12.30	9-10.30 11-12.30	9-10.30 11-12.30
Chemie	Leben im Wassertropfen	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30
Physik	PhysLab - Einführungsexperimente	9.30-11.30 11.30-13.30	9.30-11.30 11.30-13.30	9.30-11.30 11.30-13.30	9.30-11.30 11.30-13.30	9.30-11.30 11.30-13.30
Physik	PhysLab - Schwimmen, Schweben, Sinken	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30	9-11 11.30-13.30
Sprache	Versteht mich der Computer?			9.30-11.30	9.30-11.30	9.30-11.30
Sprache	Wie die Sprache tönt			10.30-12		
Tiermedizin	Ein Tier entsteht!				10-11	
Tiermedizin	Führung durch die anatomische Sammlung			11-12	10-11	

VON - BIS      Zeitintervall des jeweiligen Kurses

Abbildung 3: Kursangebot der Kinder-Uni (2008)

Alle Informationen werden über die Web-Seite der FU-Kinder-Uni ausgehängt. Auf der Basis des Stundenplans können Grundschulklassen aus Berlin und dem südwestlichen Umland durch Ihre Lehrer für die angebotenen Kurse ausschließlich über das Internet angemeldet werden. Es steht ein 3-Tage-Fenster zur Anmeldung zur Verfügung. Es wird ein Wunschkurs und ein alternativer Kurs mit jeweils einem Ersatztermin über das Online-Formular gewählt.

Seit der Einführung im Jahr 2004 ist die Anzahl der Anmeldungen kontinuierlich gestiegen. Der Bekanntheitsgrad führt zu einer konstant hohen Tendenz, was man im nächsten Bild an der Grafik der Anmeldezahlen sieht:

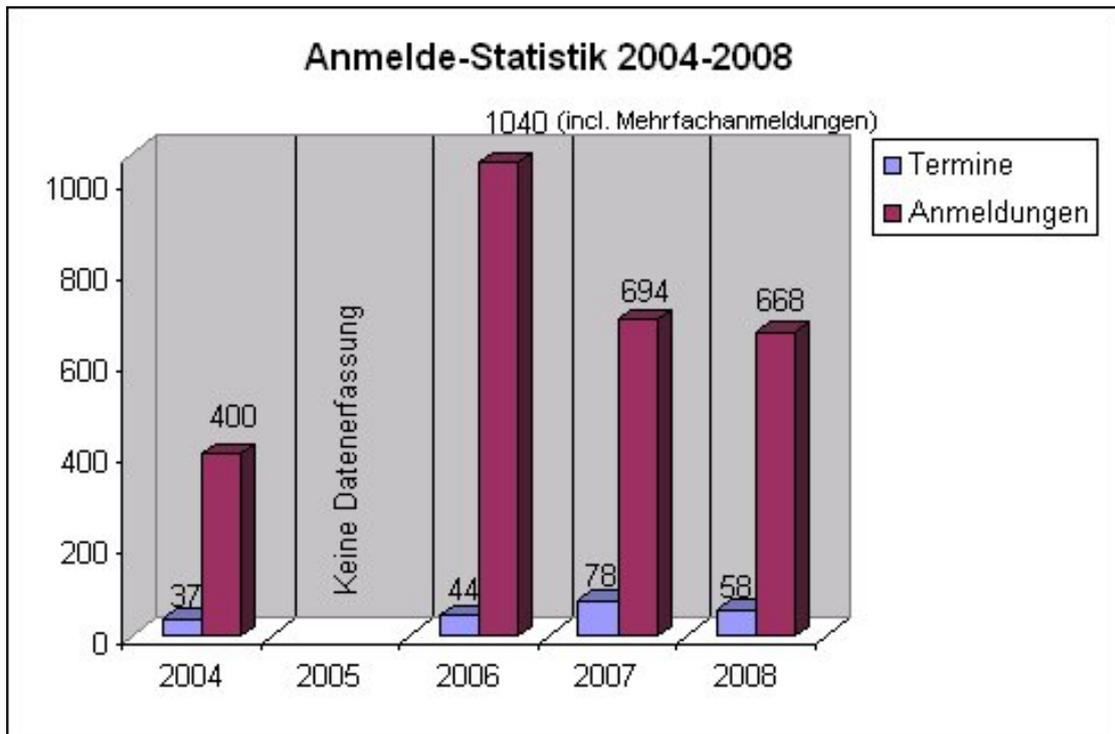


Abbildung 4: Anmelde-Statistik

Nach der Erfassung aller Anmeldungen für die Kurse der Veranstaltung der FU-Kinder-Uni in einer Datenbank wird die Verteilung der Anmeldewünsche der Klassen auf die Kurse vorgenommen.

Koordinator der FU-Kinder-Uni ist Herr Wieland Weiß. Er ist für die Planung und Organisation zuständig. Zu seinen Aufgaben gehören u.a. die Programmerstellung des Angebots der Kurse, sämtliche Werbungen und Flyer, die Raum-Einteilung, die Betreuung der Web-Seite und des Anmeldeprozesses und anschließend die Zuteilung der Anmeldungen zu den Kursen. Die aufwendigste und schwierigste Herausforderung stellt die letzte Aufgabe dar. Über 600 Anmeldungen auf ca. ein Drittel vorhandene Plätze zuzuordnen ist sehr komplex.

Der derzeitige von Herrn Weiß durchgeführte Anmeldeprozess der FU-Kinder-Uni läuft in folgenden Schritten ab:

1. Formulierung eines Wunsches basierend auf dem Terminplan der Kurse.
2. Nach der Erfassung aller Anmeldungen wird in Abhängigkeit der einzelnen Wünsche die Zuordnung der Anmeldungen zu den Kursen vorgenommen.
3. Anschließend erfolgt nach der Festlegung der End-Verteilung die Benachrichtigung. Die Ergebnisse werden im Internet veröffentlicht.

Es werden bei der Zuordnung der Anmeldungen zu den Kursen lediglich Planungshilfen in Form einer Datenbank verwendet, so dass ein, wenn man es so nennen darf, halbautomatisiertes Zuteilungsverfahren erfolgt. Anhand der Information über alle Anmeldungen pro Kurs werden manuell für die einzelnen Kurse Zuweisungen der angemeldeten Klassen vorgenommen. Mit Hilfe von Datenbankfunktionen kann man erkennen wie die Kurse ausgelastet sind, bzw. wird gezeigt, welche Klasse bereits zugeteilt ist. So wird erstmals eine grobe Richtung vorgegeben. Danach werden Unstimmigkeiten durch Austausch von Klassen beseitigt und in einzelnen Fällen werden auch noch manuelle Änderungen der Kapazitäten vorgenommen, um lokale Verbesserungen zu erzielen. Es werden beispielsweise Kapazitäten einzelner Kurse (unter einer bestimmten Toleranz) minimal erhöht, um so noch eine Klasse teilnehmen zu lassen. Oder es wird durch zugelassene „Neuanmeldungen“ der bereits ausgeschiedenen Klassen ein „Nachrückprozess“ gestartet, um die volle Belegung von nicht ausgebuchten Kursen zu erreichen.

Die im Vorfeld definierten Ziele sind, dass möglichst viele Klassen berücksichtigt werden, damit möglichst viele Schulen teilnehmen können. Weiterhin sollen möglichst aus allen angemeldeten Bezirken Klassen beteiligt sein. Es ist klar, dass eine gleichzeitige Betrachtung aller Ziele manuell sehr schwierig und kaum durchführbar ist.

Eine kritische Betrachtung des Zuteilungsprozesses der FU-Kinder-Uni beinhaltet das nächste Kapitel.

### 2.3 Diskussion des Anmeldeverfahrens der FU-Kinder-Uni

Das Angebot der Kurse kann die große Nachfrage nicht decken. Nach der Statistik vom Jahr 2007 und 2008 gab es mehr als dreifach so viele Anmeldungen als tatsächlich Terminkapazitäten vorhanden waren. Die Anzahl der vorhandenen Kurse ändert sich aber nicht wesentlich. Professoren, die bereit sind Vorlesungen zu halten, stehen auch nicht jedes Jahr in der gleichen Anzahl zur Verfügung. Es ist ein freiwilliges Projekt, so dass sie nicht dazu verpflichtet werden können. Es steht so mit stets wachsenden Anmeldezahlen die komplexe Planungsaufgabe, die Zuteilung der Anmeldungen zu den einzelnen begrenzten Projekten zu lösen. Der Entscheidungsprozess für eine gerechte Berücksichtigung aller Schulen und Klassen ist schwierig und erfordert sehr viel Aufwand aufgrund der vielen parallel zu betrachtenden Informationen. Dabei erfolgt eine Zuteilung, die soweit möglich die vorher definierten Bedingungen und Ziele berücksichtigt, die aber bei der Planung „von Hand“ nur eine mögliche Kombination der Zuordnungen von Klassen zu Kursen liefert.

Die Folge ist, dass beispielsweise weniger Klassen als wirklich möglich beteiligt werden können. Und auch über die Fairness der vorhandenen Zuordnung können nur ungenaue Aussagen gemacht werden. Mit der derzeitigen Planungsroutine ist es auch nicht möglich einen konkreten Beweis für die Qualität des Ergebnisses der Zuordnungen zu liefern oder Alternativen zum Vergleich zu generieren. Also wird die möglichst beste Zuordnung unter Berücksichtigung der vielen möglichen Zielsetzungen wie beispielsweise maximal viele Teilnehmer, maximale Anzahl neuer Schulen, Überdeckung aller Bezirke bei diesem

Zuteilungsprozess nicht erreicht.

Dieses unbefriedigende Ergebnis stellt sich ein, da kein standardisiertes und automatisiertes Verfahren im Zuordnungsprozess angewandt wird.

Um die best mögliche Zuordnung, eine bessere Auslastung der Kurse bzw. damit auch eine hohe Kundenzufriedenheit zu erreichen, wird im Rahmen der Organisation der FU-Kinder-Uni-Veranstaltung ein Zuordnungsverfahren der Anmeldungen mittels Optimierung vorgeschlagen.

Es soll ein mathematisches Modell entwickelt werden, mit dem die Generierung beweisbar optimaler Zuordnungen möglich und eine bessere Transparenz der Ergebnisse gegeben ist.

Hier nochmal eine Zusammenfassung der diskutierten Punkte der bisherigen Vorgehensweise:

- Steigende Komplexität der Zuteilung der Anmeldungen zu den einzelnen Kursen mit wachsenden Anmeldezahlen .
- Entscheidungsprozess für eine gerechte Berücksichtigung aller Schulen und Klassen ist schwierig und erfordert sehr viel Aufwand.
- Die Zuordnung stellt nur eine mögliche Kombination dar.
- Es gibt keine Aussage über die Qualität.
- Es ist kein Generieren von alternativen Zuordnungen möglich.
- Berücksichtigung und Analyse mehrerer Zielkriterien wäre aber erforderlich.
- Es erfolgt keine gezielte Informationsausgabe während des Anmeldeprozesses.
- Es gibt keine Transparenz des Ergebnisses.

Das nächste Kapitel behandelt die Veranstaltungsplanung im Allgemeinen, geht dann auf die eigentlichen Ziele dieser Arbeit ein und bildet die Grundlage für die sich hieran anschließende Modellierung der Optimierungsaufgabe der Kinder-Uni-Planung.

## 2.4 Aufgaben und Ziele der Arbeit

Veranstaltungen werden als ein Instrument zum Erreichen definierter Zielgruppen immer wichtiger für sehr viele Institutionen. Die Veranstaltungsplanung als Ganzes besteht aus mehreren einzelnen Schritten, die auf Grund der Menge von Informationen, die berücksichtigt werden müssen, meist einen großen organisatorischen und technischen Aufwand erfordern und ohne mathematisch basierende Rechnungen nicht bestens ausgeführt werden können. Bei der Planung gibt es viele Dinge zu beachten, z.B. zur Raumplanung, Kursangebotsplanung, Kapazitätsplanung. Abhängig von der Anzahl der geplanten Kurse und der erwarteten Teilnehmer werden die Räumlichkeiten eingeteilt. Bei der FU-Kinder-Uni-Veranstaltung stehen die Räume fest und das Angebot der Kurse ist im Voraus so

gegeben, dass eine vollständige Deckung aller Anfragen nicht möglich ist. Trotzdem steht das Ziel, die höchste Zuordnung (unter definierten Bedingungen) an der Veranstaltung, sowie das Zufriedenstellen möglichst vieler Teilnehmer zu gewährleisten. Das lässt sich mit einfachem Durchprobieren nicht realisieren. Bei den gegebenen Voraussetzungen ist es besonders schwierig und wichtig, stets den Überblick zu behalten. Die Bearbeitung der Probleme von Hand ist außerdem sehr zeitintensiv, so dass sie sich jedenfalls bei Problemen ab einer gewissen Größe nicht mehr anbietet, sondern eine automatisierte Bearbeitung mit einem an das konkrete Problem angepassten Verfahren, wünschenswert ist.

Bei der FU-Kinder-Uni ist das Ziel somit eine objektive, nach bestimmten Kriterien, beste Entscheidung für die Zuordnung der Klassen zu den Kursen zu treffen, d.h. einen unabhängigen Entscheidungsprozess zu entwickeln. Der Einsatz von Optimierungs-Methoden in der Planungsphase soll eine objektive Klärung von Zusammenhängen und Abhängigkeiten gewährleisten.

Die Verteilung der Klassen auf die Kurse im Rahmen der Planung der FU-Kinder-Uni stellt ein Knapsack-Problem (Zuordnungsproblem) dar, das zur Klasse der kombinatorischen Optimierungsprobleme gehört. Es handelt sich speziell um ein Multiple-Knapsack-Problem mit Nebenbedingungen.

Diskrete und kombinatorische Optimierung beschäftigt sich mit der Behandlung von Fragestellungen, bei deren Modellierung ganzzahlige bzw. insbesondere 0/1-Variablen (Variablen, die den Wert 0 oder 1 annehmen können) eine zentrale Rolle spielen. Derartige Variablen korrespondieren dann meist mit Entscheidungen, die zu treffen oder nicht zu treffen sind, oder zu ganzzahligen Ressourcen (Personal, Maschinen, Fahrzeuge etc.), deren Einsatz geplant werden muss. Eine zentrale Klasse auf dem Gebiet der kombinatorischen Optimierungsprobleme bilden die Knapsack-Probleme. Beispiele dieser Klasse sind die Auswahl und Zuordnung von Gegenständen auf Ressourcen mit begrenzten Kapazitäten bzgl. verschiedener zu maximierender bzw. minimierender Zielsetzungen, wobei bestimmte Nebenbedingungen erfüllt werden müssen. So wie z.B. Zuschnitt- oder Packungsprobleme, Maschinenbelegungsplanung, Beladen von Containern, der Stunden- und Raumplanung einer Schule oder Universität usw. Die Knapsack-Probleme sollen vereinfacht an einem kleinen Beispiel erklärt werden. Einige Gegenstände mit einem bestimmten Gewicht, Profit und die Größe eines „Rucksacks“ sind gegeben. Die Frage ist, welche Gegenstände mitgenommen werden sollten, um die bestmögliche Bepackung des Rucksacks zu erreichen. Die Menge von Gegenständen soll so verpackt werden, dass ihr Gesamtgewicht einen vorgeschriebenen Wert (Kapazität des Rucksacks) nicht übersteigt und der Gesamtprofit möglichst hoch ist.

Die theoretischen Grundlagen zu den Knapsack Problemen sind ausführlich im Kapitel 4 erläutert.

Am Beispiel der Planung der FU-Kinder-Universität stehen folgende Hauptaufgaben im Mittelpunkt dieser Ausarbeitung:

- Modellierung des Planungsproblems als ein Optimierungsmodell zur Gewährleistung der besten Zuordnung der Anmeldungen zu den Kursen. Dies geschieht im

Rahmen dieser Arbeit noch in einer sogenannten „Offline-Planung“ zur Entwicklung einer automatisierten Erstellung mathematischer Zuordnungsvorschläge auf Basis von statischen Eingabedaten. Damit kann man zu einer bestimmten Input-Datenmenge die entsprechende beste Zuordnung mit dem Modell generieren. Es werden noch Analysemöglichkeiten getestet, die zu einer verbesserten Analysetätigkeit führen und zur Gestaltung des Zuordnungsprozesses der Anmeldungen eingesetzt werden können.

- Konfliktanalyse der Zuordnung zur Transparenz der Ergebnisse und als Gewährleistung der besten Zuordnung der Anmeldungen zu den Kursen.
- „Online-Planung“. Entwicklung eines Konzeptes für die Einbettung des Optimierungsmodells in den Anmeldeprozess. Es soll versucht werden Informationen während der Anmeldung, zur Steuerung dieser, auszugeben. Das Ziel ist es, eine bessere Auslastung der Kurse und eine höhere Teilnehmerzahl zu erreichen. Es soll ein Online- Realisierungs-Konzept zur Abwicklung des Anmeldeprozesses mittels Optimierung und als Basis für das mathematische Modell vorgestellt werden.

Das konkrete Modell dieser Arbeit (das IP-Modell der Kinder-Uni, kurz KIP-Modell) wird als ein lineares ganzzahliges Programm eines Multiple-Knapsack-Problems mit Nebenbedingungen aufgestellt. Die Probleminstanzen, die zu Knapsack-Problemen gehören sind bekanntlich NP-vollständig und damit ist man in der Praxis auf effektive Heuristiken angewiesen. In Bezug auf die Eingabedaten ist das Problem von kleiner Dimension, so dass eine Zuordnung unter einer Sekunde mit SCIP<sup>0</sup> generiert werden kann. Somit ist eine objektive Zuordnung gewährleistet und ein Beweis der Qualität des Ergebnisses ist möglich.

Der Zuteilungsprozess der FU-Kinder-Uni ist auch ein Beispiel multikriterieller Optimierung, da verschiedene mögliche Zielsetzungen vorhanden sind. Sie werden auch zur Variation von Zuordnungen eingesetzt. Deren Generieren erfolgt durch Variationsparameter (Koeffizienten in der Zielfunktion), aber auch durch zusätzliche Bedingungen im Modell, so dass unterschiedliche Bewertungskriterien für die Zuordnungen definiert werden. Mehrere Zuordnungsszenarien dienen zur besseren Analyse der Datenstruktur des zu optimierenden Problems, um mit der gegebenenfalls daraus resultierenden Notwendigkeit einer Kapazitätsveränderung, die Verteilung der Klassen am besten den gegebenen Ressourcen anpassen zu können. Die erstmalige multikriterielle Optimierung des Anmeldeprozesses der FU-Kinder-Uni im Jahr 2008 ist im Kapitel 6 näher beschrieben.

Anschließend wird eine Konfliktanalyse der Zuordnung durchgeführt, um die Qualität dieser nach außen transparenter zu gestalten. Auf explizites Nachfragen soll es möglich sein, Argumente zu liefern, um konkrete Ansprüche oder Zweifel zu widerlegen.

Eine letzte Aufgabe, die Entwicklung eines Konzeptes für die FU-Kinder-Uni, bildet die Grundlage für die komplette Abwicklung des Online-Anmeldeprozesses und des darge-

<sup>0</sup>SCIP(Solving Constraint Integer Programs) ist einer der schnellsten nichtkommerziellen Solver für gemischt ganzzahlige Lineare-Programme vom Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik in Berlin

stellten Optimierungsmodells. Die Erfassung, Überwachung und Steuerung der Anmeldungen sollen gewährleistet und eine gute Startbasis für die folgende Optimierung geschaffen werden.

### 3 Modellierung des Zuordnungsproblems der FU-Kinder-Uni

Anhand der Problemstellung soll nun das mathematische Modell für das Zuordnungsproblem aufgestellt werden.

#### 3.1 Vorgaben des Anmeldeprozesses

Im Folgenden werden die vorläufigen Vorgaben, Bedingungen und die Zielfunktion des Zuordnungsproblems, wie sie sich aus der bisherigen Praxis ergeben, beschrieben.

Alle notwendigen Daten sind in einer Datenbank erfasst. Durch Abfragen wurden die benötigten Informationen als ein Excel-Datei zur Verfügung gestellt:

- Menge der Anmeldungen
- Menge der Kurse
- Kapazität der Kurse
- Menge der Uhrzeiten
- Menge der Klassen
- Größe der Klassen
- Menge der Bezirke
- Menge der Schulen
- Menge der beteiligten Schulen im Vorjahr
- Eignungsgrad der Projekte für die Klassen
- Wunschkurs mit erstem und zweitem Termin und je ein Alternativkurs pro Klasse

Die Gesamtinformationen wurden dann als eine Datei „Input.txt“ mit eindeutigen Id's zusammengefasst und stellten die End-Daten für das zu entwickelnde Modell dar. Das Format der Datei „Input.txt“ basiert auf dem DIMACS-Format, das für das Kinder-Uni-Problem spezifiziert wurde. Die Datei ist im Kapitel 10 enthalten.

### 3.2 Randbedingungen/Zielfunktion

Es werden als nächstes die Randbedingungen festgelegt. Randbedingungen (Restriktionen) stellen Beschränkungen des für die Modellparameter zulässigen Bereiches dar.

- Berücksichtigung der Teilnahme der Klassen im letzten Jahr.
- Jeder Kurs darf höchstens mit seiner maximalen Kapazität belegt werden.
- Jede Klasse darf mit maximal einem Kurs, dem Wunsch- oder dem Ersatztermin zugeordnet werden.
- Möglichst alle angebotenen Termine sollen berücksichtigt werden.
- Abdeckung möglichst aller angemeldeten Bezirke.
- Vorher definierte Konflikte in der Beteiligung von unterschiedlichen Altersstufen sollen ausgeschlossen werden (im Jahr 2008).

Im Jahr 2008 stand die Beteiligung einer maximal möglichen Anzahl neuer Schulen im Vordergrund. Im Jahr 2007 war das Ziel möglichst viele Teilnehmer zuzuordnen.

### 3.3 Notation

Hier folgen die notwendigen Parameterdefinitionen und Begriffserläuterungen für das nachfolgende KIP-Modell:

- Menge der Anmeldungen  $A$ , wobei eine Anmeldung durch eine Klasse und einen Termin eindeutig definiert ist
- Menge der Klassen  $I = \{1, \dots, n\}$ ; Klassen sind eindeutig durch den Namen und die zugehörige Schule definiert
- Menge der Termine  $J = \{1, \dots, m\}$ ; Termine sind durch einen Kurs (Kursnummer) und eine Zeitangabe (Datum und Uhrzeit) definiert, da ein und derselbe Kurs an mehreren Tagen stattfinden kann
- Menge der Bezirke  $B$ , Menge aller Schulen  $S$  und Menge der beteiligten Schulen vom Vorjahr  $S'$
- $y_n$ : Parameter für die Anzahl neuer Schulen
- für jeden Termin  $j$  ( $j = 1, \dots, m$ ): die Größe der Klasse  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) zum Termin  $j$ :  $w_{ij}$
- Verfügbare Kapazitäten  $c_j > 0$  für jeden Termin  $j$

- für jeden Termin  $j$  ( $j = 1, \dots, m$ ): die Zuweisung von Klasse  $i$  zu Termin  $j$  ( $i = 1, \dots, n$ ):  $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Klasse } i \text{ dem Termin } j \text{ zugeordnet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- für jede Klasse  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ): der zugehörige Bezirk  $\beta_i$  und Schule  $\sigma_i$
- für jede Schule  $s$ : Variable  $y_s = \begin{cases} 1, & \text{wenn } s \text{ beruecksichtigt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$   
für die Teilnahme der Schule
- für jeden Bezirk  $g$ : Variable  $z_b = \begin{cases} 1, & \text{wenn } b \text{ beruecksichtigt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$   
für die Teilnahme des Bezirks
- Menge  $E$  der Paare von Gegenständen, die im Konflikt stehen
- Menge  $P$  der Physik-Termine
- $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$  Parameter für die Gewichtung in der Zielfunktion
- Planungsgraph  $D=(I \cup J, A)$  bipartit; die Knotenmengen entsprechen der Menge der Klassen und Termine ( $I$  und  $J$ ) und die Kanten definieren die einzelnen Anmeldungen (mögliche Zuordnungen).

Es ergibt sich die folgende graphische Darstellung des Zuordnungsproblems:

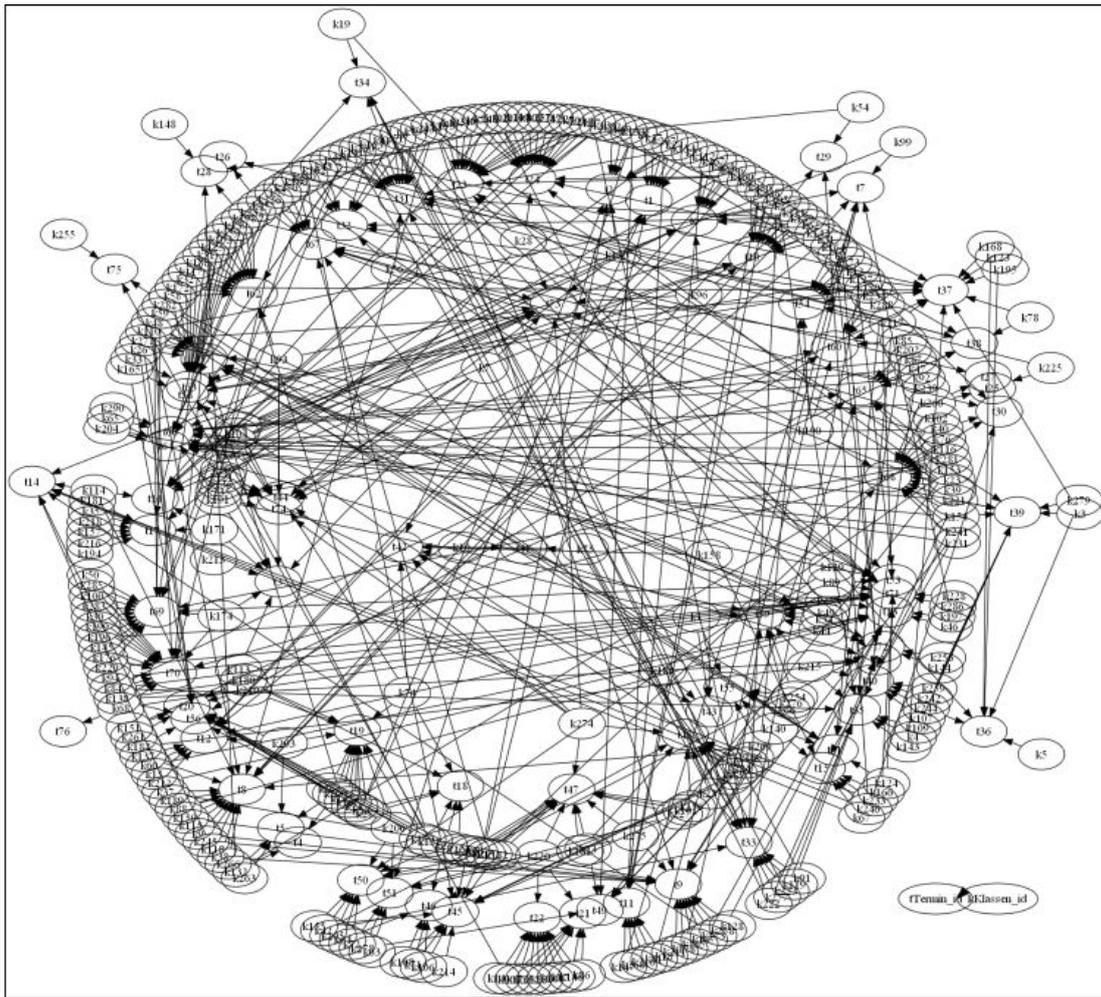


Abbildung 5: Planungsgraph der FU-Kinder-Uni

Alle Pfeile im Planungsgraph laufen von einer *Klassen\_id* zu *Termin\_id*'s. Die Pfeile stellen zusammen alle Anmeldungen der Klasse dar. Der gesamte Graph spiegelt die komplexen Zusammenhänge der vorliegenden Daten wieder. Durch die Unübersichtlichkeit und Komplexität dieser Struktur, kann man die Notwendigkeit einer mathematischen Betrachtung erkennen. Durch gezielte Analysen können so verschiedene Erkenntnisse gewonnen und als Unterstützung im Entscheidungsprozess zur Verfügung gestellt werden. Zu der eigentlichen Größe von D wird später noch etwas gesagt.

### 3.4 Das KIP-Modell

Das KIP-Modell als ein Multiple-Knapsack-Problem mit Nebenbedingungen ist das folgende Basis-IP-Modell:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} && \alpha \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} &+& \beta \sum_{s \in S} y_s &+& \gamma \sum_{b \in B} z_b \\
 & \text{s.t.:} && \sum_{\forall ij \in A} x_{ij} &\leq& 1 && \forall i \in I & (1) \\
 & && \sum_{\forall ij \in A} w_{ij} x_{ij} &\leq& c_j && \forall j \in J/P & (2) \\
 & && \sum_{i \in I} x_{ij} &\geq& y_s && \forall s \in S & (3) \\
 & && \sum_{i \in I} x_{ij} &\geq& z_b && \forall b \in B & (4) \\
 & && \sum_{s \in S'} y_s &\geq& y_n && S' \subseteq S & (5) & \text{(KIP)} \\
 & && x_{ij} + x_{i'j} &\leq& 1 && \forall (i, i') \in E & (6) \\
 & && \sum_{\forall ij \in A} w_{ij} x_{ij} &\leq& c_j && \forall j \in P & (7) \\
 & && \sum_{\forall ij \in A} x_{ij} &=& 1 && \forall j \in P & (8) \\
 & && x_{ij} &\in& \{0, 1\} && \forall ij \in A & (9)
 \end{aligned}$$

- (1) Zuordnung einer Klasse höchstens zu einem Termin
- (2) Kapazitätsbedingung
- (3) Garantie für die Mindestanzahl von Schulen, die teilnehmen; es sind mehr verschiedene Schulen anstatt verschiedene Klassen einer Schule angestrebt
- (4) Überdeckung aller Bezirke angestrebt
- (5) Beteiligung einer bestimmten Anzahl  $y_n$  neuer Schulen
- (6) Konflikt-Regel
- (7) Extra Regel für die Auslastung der Physik-Termine
- (8) Zuordnung von nur einer Klasse zu den Physik-Terminen
- (9) die binäre Variable  $x_{ij}$  nimmt den Wert 1 an, wenn die Klasse  $i$  dem Termin  $j$  zugeteilt wird, sonst den Wert 0

#### **Definition**

Sei eine Lösung mit dem KIP-Modell als eine **Zuordnung**<sup>1</sup> mit einem Zielfunktionswert  $z(\text{KIP})$  definiert.

<sup>1</sup>In dieser Arbeit wird oft eine Zuordnung auch als eine Optimalzuordnung bezeichnet, die nach bestimmten Kriterien als die beste ausgewählt wurde, um diese gegenüber anderen Zuordnungen hervorzuheben.

## 4 Theoretische Grundlagen der Multiple-Knapsack-Probleme

Im folgenden Kapitel wird ein Überblick über die theoretischen Grundlagen der Knapsack-Probleme gegeben. Dabei wird zunächst die formale Problemstellung der 0/1-Single- und Multiple-Knapsack-Probleme beschrieben und die wesentlichen Ideen und Konzepte der klassischen Algorithmen vorgestellt; es ist nicht das Ziel die Algorithmen vollständig zu präsentieren.

Eine umfassende Übersicht über die Knapsack-Probleme, andere verwandte Probleme und die dazugehörigen Algorithmen, gibt das gleichnamige Buch von Kellerer, Pferschy und Pisinger [1]. Da die verschiedenen Varianten dieser Knapsack-Probleme entweder Einschränkungen oder Erweiterungen sind, lassen sich einige Ergebnisse zwischen diesen übertragen.

### 4.1 0/1-Single-Knapsack-Problem

Die Klasse von kombinatorischen Optimierungsproblemen, zu der die Knapsack-Probleme gehören, ist die meist untersuchte Klasse und ein Basistyp in der ganzzahligen Programmierung. In vielen betriebswirtschaftlichen Fragestellungen, Bereichen der Wirtschaft und der Industrie treten Knapsack-Probleme auf. Beispielsweise in der Finanztheorie, bei Verschnitt- oder Beladungsproblemen im Wertschöpfungsprozess oder bei bestimmten Auktionstypen (sog. kombinatorischen Auktionen, die vor allem bei technischen Gütern angewendet werden). Optimierungsprobleme spielen auch eine Rolle in der Raum- und Standortplanung, bei Fragen der Lagerhaltung und dem Maschineneinsatz in der Produktionswirtschaft sowie im logistischen Bereich der Absatzwirtschaft. (vgl. [1]) Das einfache 0/1-Single-Knapsack-Problem (SKP<sup>2</sup>) wird wie folgt charakterisiert:

**Input:**            n Gegenstände; ein Rucksack  
                        $p_i$  Profit des Gegenstands i  
                        $w_i$  Gewicht des Gegenstands i  
                       c Gewichtskapazität des Rucksacks

**Gesucht:**        Eine Teilmenge von Gegenständen, deren Gesamtkapazität die des Rucksacks c nicht überschreitet und deren Gesamtprofit maximal ist.

Man spricht von einem 0/1-Knapsack-Problem, da die Gegenstände nicht geteilt werden dürfen (der Gegenstand nimmt in der Lösung entweder ganz teil oder gar nicht).

Die IP dazu lautet:

<sup>2</sup>In dieser Arbeit werden ausschließlich 0/1-Knapsack-Probleme bzw. die entsprechenden Abkürzungen betrachtet.

$$\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \sum_{i=1}^n p_i x_i \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq c \\
& x_i \in \{0, 1\}
\end{array} \quad (\text{SKP})$$

Die Auseinandersetzung mit Single-Knapsack-Problemen liefert wichtige Erkenntnisse für sehr viele andere mathematische Modelle, da sie sehr oft als Subproblem in den Lösungsmethoden (beispielsweise bei der Bestimmung von oberen Schranken durch Relaxierung) vorkommen.

Historisch betrachtet, sind viele Techniken der kombinatorischen Optimierung und auch der Informatik im Zusammenhang mit Knapsack-Problemen eingeführt worden. Knapsack-Probleme wurden als eines der ersten Optimierungsprobleme in der Entwicklung der NP-Komplexitätstheorie betrachtet. Sie gehören zu den NP-vollständigen Problemen. Allerdings existieren für sie aber pseudo-polynomielle Algorithmen (siehe [6]) und auch vollpolynomielle Approximationsschemata (FPTAS) existieren. Ein Ansatz zur Lösung mit dynamischer Programmierung ist im Abschnitt 4.1.2 erläutert.

#### 4.1.1 Greedy-Algorithmen

Eine klassische Lösungsmöglichkeit für Knapsack-Probleme stellen Greedy-Ansätze dar. Die Lösung kann hierbei beliebig weit vom Optimum liegen.

Als nächstes werden überblicksartig die Greedy-Algorithmen für SKP präsentiert.

Die Grundidee ist die folgende:

- Sortieren der Gegenstände nach ihrer Effizienz ( $\frac{p_i}{w_i}$ )
- Packe die Gegenstände in der Reihenfolge, so dass die Rucksackkapazität nicht überschritten wird

Die Laufzeit beträgt  $O(n \log n)$ .

Ein anderer Greedy-Ansatz stellt der Ext-Greedy-Algorithmus dar. Es wird eine Optimallösung mit dem oberen Ansatz ermittelt  $z(G)$  und diese mit der Lösung, die nur aus dem Gegenstand mit dem größten Profit besteht, verglichen. Die Optimallösung vom Ext-Greedy ist dann der größere Wert von beiden.

$$z(eG) = \{z(G); \max \{p_i | i = 1, \dots, n\}\}.$$

**Satz 4.1.1** ([1]) Der Ext-Greedy hat eine Gütegarantie von  $\frac{1}{2}$ .

Der Nachteil des Ext-Greedy-Algorithmus besteht in dem großen Einfluss eines einzigen Gegenstands mit größtem Profit.

Eine Verbesserung ist der Algorithmus  $G^{\frac{2}{3}}$  mit der folgenden Idee:  
Die Idee ist folgende:

- Der Gegenstand mit dem größten Profit in der Optimallösung wird „geraten“.
- Anwendung des Greedy-Algorithmus auf das Restproblem.

**Satz 4.1.2**([1])  $G^{\frac{2}{3}}$  hat eine Gütegarantie von  $\frac{2}{3}$ .

Ein weiterer Algorithmus ist der  $G^{\frac{3}{4}}$ :

- Die beiden Gegenstände mit den größten Profiten in der Optimallösung werden „geraten“.
- Alle Paare von Gegenständen werden durchprobiert.

**Satz 4.1.3** ([1])  $G^{\frac{3}{4}}$  hat eine Gütegarantie von  $\frac{3}{4}$ .

#### 4.1.2 Dynamische Programmierung

Hier wird kurz die Idee der Algorithmen, die nach dem Prinzip der dynamischen Programmierung arbeiten, für SKP vorgestellt. Solche Algorithmen sind rekursive Algorithmen, die eine Optimallösung durch Ermittlung von Optimallösungen von Teilproblemen generieren. Dies entspricht dem *Belmanschen Optimalitätsprinzip*, nach dem eine Optimallösung eines Problems sich aus optimalen Teillösungen dieses Problems zusammensetzt. Wenn der zu bepackende Rucksack (mit Kapazität  $c$ ) optimal mit einer Menge  $I' \subseteq I$  von Gegenständen gepackt wurde, gilt für jedes  $i \in I'$ , dass der um  $c-w_i$  verkleinerte Rucksack ebenfalls optimal mit einem Teil der Gegenstände  $I' \setminus \{i\}$  gepackt ist.

Formal ist der Algorithmus nach den Ausführungen aus [1] wie folgt gegeben:  
Menge der Gegenstände  $I = \{1, \dots, n\}$ , Teilmenge von Gegenständen  $I' = \{1, \dots, i\} \subseteq I$ , Rucksackkapazität  $c$ . Für  $i=0, \dots, n$  und Kapazitäten  $c' \leq c$  ist  $SKP_i(c')$  definiert als:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{l=1}^i p_l * x_l \\ \text{s.t.} & \sum_{l=1}^i w_l * x_l \leq c' \quad (SKP_i(c')) \\ & x_l \in \{0, 1\}, l = 1, \dots, i \end{array}$$

Der Zielfunktionswert  $z_i(c')$  wird folgendermaßen iterativ ermittelt :

$$z_i(c') = \begin{cases} z_{i-1}(c') & , \text{wenn } c' < w_i \\ \max \{ z_{i-1}(c'), z_{i-1}(c' - w_i) + p_i \} & , \text{wenn } c' \geq w_i \end{cases}$$

Es werden systematisch Kombinationen von Lösungen betrachtet, die für jede Kapazitätsgröße kleiner gleich  $c$  die optimale Bepackung ermitteln, die dann zu einer Gesamtlösung

führen. Es ist klar, dass dann die Optimallösung  $\max z_n^*(c)$  ist. Die Laufzeit beträgt  $O(nc)$ .

### 4.1.3 PTAS/FPTAS

Für das SKP existieren wie erwähnt polynomielle Approximationsschemata (PTAS) und auch vollpolynomielle Approximationsschemata (FPTAS). Sie werden als nächstes erläutert.

Es ist die folgende Grundidee für PTAS gegeben:

- Ein geeignetes Unterproblem der Größe  $k$  wird gewählt.
- Optimales Lösen des Unterproblems durch vollständige Enumeration.
- Erweiterung der Lösung zu einer Gesamtlösung.

Die Idee von Sahni (vgl.[1]) zur Realisation einer PTAS für SKP wird folgendermaßen umgesetzt:

Es wird ein Parameter  $k$  ausgewählt und danach werden die  $k$ -Gegenstände mit größtem Profit in der Optimallösung „geraten“, d.h., der Algorithmus probiert die Teilmengen aller Gegenstände mit  $k$ -Elementen aus und füllt diese jeweils nach dem Greedy-Prinzip auf.

Es gilt für die Approximationsgüte  $A \geq \frac{k+1}{k+2} z^*$ .

Wähle  $k := \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil - 2 \Rightarrow (1 - \epsilon)$ -Approximationsalgorithmus.

Die Laufzeit beträgt  $O(n^{k+1})$ :

Einer Verbesserung (vgl.[1]) ist gegeben durch Systematisches Enumerieren der Teilmengen:  $n^{k-1}$  Iterationen mit jeweils  $n$  Teilmengen mit absteigenden Kapazitäten. Greedy kann in  $O(n)$  für jede Iteration alle  $n$  Lösungen bestimmen. Die Gesamtzeit ist  $O(n^k)$ .

Der Nachteil des polynomiellen Approximationsschemas (exponentiell in  $1/\epsilon$ ) kann für das SKP durch die Existenz von einem vollpolynomiellen Approximationsschema ausgeglichen werden.

Das Konstruktionsprinzip beinhaltet eine Skalierung. Folgende Grundidee von Lawler (vgl. [1]) ist für SKP gegeben:

1. Dynamisches Programmieren liefert die Optimallösung in pseudopolynomieller Zeit.
2. Um nun eine polynomielle Laufzeit zu erhalten, skaliert man alle Profite durch einen geeigneten Faktor  $K$  und rundet ab. Dadurch ist die Lösung nur noch eine Näherungslösung.

### FPTAS für SKP

Man verwendet den Algorithmus aus Abschnitt 4.2.1.. Definiere ein Array  $y$ . Sei  $y(p)$  das minimale Gewicht einer Teilmenge von Gegenständen mit Gesamtprofit  $p$ . Es gilt für die Optimallösung  $z^*$ :  $z^* := \max \{p | y(p) \leq c\}$ .

$y_j(p)$  definiert also die Einschränkung des minimalen Gewichts auf die Menge der Gegenstände  $\{1, \dots, j\}$ .

Die Berechnung wird rekursiv durch das Einfügen vom Gegenstand  $j + 1$  berechnet:

$$y_{j+1}(p) := \min \{y_j(p), y_j(p - p_{j+1}) + w_{j+1}\}$$

Das liefert einen pseudopolynomiellen Algorithmus mit Laufzeit  $O(nP)$ ,  $P = \sum_{i=1}^n p_i$ . Eine Konstante  $K$  wird ausgewählt und der Profit-Bereich wird skaliert. Es gilt dann für die Profite  $\tilde{p}_i := \lfloor \frac{p_i}{K} \rfloor$ .

Also erhält man durch die dynamische Programmierung mit den skalierten Profit-Werten  $\tilde{p}_i$  für  $K = \frac{\epsilon \cdot p_{max}}{n}$ ,  $p_{max} = \{p_i | 1 \leq i \leq n\}$  ein FPTAS. Die Laufzeit ist  $O(\frac{n^3}{\epsilon})$ .

Die meisten weiteren Ansätze, um das Rucksack-Problem zu lösen, beruhen auf Branch-and-Bound-Ansätzen. Auf eine weitere Darstellung dieser Ergebnisse soll hier jedoch verzichtet werden. Für eine ausführliche Betrachtung sei auf [1] verwiesen. Branch-and-Bound-Ansätzen werden später für die allgemeine Form, die Multiple-Knapsack-Probleme erläutert.

Im nächsten Abschnitt wird noch kurz eine spezielle Klasse von Knapsack-Probleme (knapsack problem with conflict graph-kurz KCG) beschrieben.

#### 4.1.4 Knapsack-Probleme mit Konflikten

Diese Klasse stellt eine Erweiterung der 0/1-SKP mit Restriktionen für Paare von Gegenständen dar, die nicht gleichzeitig zugeteilt werden dürfen. Dies bedeutet, dass höchstens einer der Gegenstände zugeteilt wird. Diese Konflikte sind in einem Graph  $G=(V,E)$  dargestellt, wobei  $|V|=n$  nicht notwendigerweise zusammenhängend ist. O.B.d.A. sei  $G$  zusammenhängend. Sonst kann  $G$  durch das Einfügen von zusätzlichen Dummy-Knoten leicht auf einen zusammenhängenden Graph zurückgeführt werden. Das IP lautet:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq c \\ & x_i + x_{i'} \leq 1 \quad \forall (i, i') \in E \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n \end{array} \quad (\text{KCG})$$

KCG ist für allgemeine Graphen strikt NP-hard und es existiert kein pseudo-polynomiellenr Algorithmus (vgl.[10]).

Yamada (vgl. [10]) schlägt einen klassischen Greedy-Algorithmus vor, der einen Gegenstand dann verpackt, wenn er zusätzlich nicht im Konflikt mit den bisher zugeteilten Ge-

genständen steht. Dieser wird mittels eines 2-opt-Ansatzes erweitert. Eine untere Schranke wird durch den Zielfunktionswert, eine obere Schranke durch die *Lineare*-bzw. noch durch die *Lagrange*-Relaxierung gegeben. Eine andere Möglichkeit zum Bestimmen einer unteren Schranke ist die Berechnung einer Konvexkombination der ursprünglichen oberen und unteren Schranken. Anschließend wird ein Branch-and-Bound-Algorithmus konstruiert, der zur Reduktion des Suchraumes die Konflikt-Restriktionen und das Standard-Dominanz-Kriterium benutzt.

Weiterhin werden andere Publikationen von Hifi und Muchrafi erwähnt, die eine Metaheuristik, genannt „Sophisticated rective local search algorithm with tabu list“ mit guten Rechenergebnissen, vorstellen.

Das Ziel der Arbeit von Pferschy und Schauer [10] ist, spezielle Klassen von Graphen zu identifizieren, für die ein pseudo-polynomieller Algorithmus und FPTAS existieren. Es werden folgenden Klasse präsentiert: Bäume, Graphen mit beschränkter Breite und „chordal“- Graphen (vgl [10]). Die in [10] vorgestellten Algorithmen AlgTr, AlgTDC und AlgCh erfüllen diese Voraussetzungen für FPTAS und haben eine Laufzeit von  $O(n \cdot P^2)$ , AlgCh von  $O((n + m) \cdot P^2)$ , wobei  $P = \sum_{i=1}^n p_i$ .

## 4.2 0/1-Multiple-Knapsack-Problem

Multiple-Knapsack-Problem (MKP) ist die Generalisation des Single-Knapsack-Problems (SKP) von einem einzelnen Rucksack zu  $m$  Rucksäcken mit verschiedenen Kapazitäten. Weiter hat jeder Gegenstand ein unterschiedliches Gewicht für jeden Rucksack.

Formal ist (MKP) als folgendes Maximierungsproblem definiert:

- Input:**  $n$  Gegenstände;  $m$  Rucksäcke ( $m < n$ )  
 $p_i$  Profit des Gegenstands  $i$   
 $w_i$  Gewicht des Gegenstands  $i$   
 $c_j$  Gewichtskapazität des Rucksacks  $j$
- Gesucht:** Eine Teilmenge von Gegenständen deren Gesamtprofit maximal ist, so dass die Kapazität der Gegenstände in jedem Rucksack  $j$  dessen Kapazität  $c_j$  nicht übersteigt.

MKP kann entsprechend als Lösung des folgenden ganzzahligen linearen Programms (IP) formuliert werden:

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p_i * x_{ij} \\
 \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n w_i * x_{ij} \leq c_j \quad i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m
 \end{array} \quad (\text{MKP})$$

Die binäre Variable  $x_{ij}$  nimmt den Wert 1 an, wenn der Gegenstand  $i$  in den Rucksack  $j$  aufgenommen wird, sonst den Wert 0. Die erste Ungleichung spiegelt die Kapazitätsbedingung wieder und die zweite garantiert, dass jeder Gegenstand höchstens einem Rucksack zugeordnet werden darf.

Erwünscht ist eine optimale Lösung des oberen IP. Da MKP NP-vollständig ist, gibt es zu fast allen „interessanten“ Problemen der Klasse kein effizientes optimales Lösungsverfahren, d.h. keinen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit.

Als nächstes werden die Methoden zum Generieren von Lösungen für MKP dargestellt:

1. Optimale Lösung durch überlegte Enumeration
  - Dynamisches Programmieren
  - Branch-and-Bound
2. Verzicht auf Optimalität  $\implies$  Approximation

#### 4.2.1 Branch-and-Bound-Algorithmen

Die Bestimmung von oberen Schranken bildet die Grundlage für Branch-and-Bound-Algorithmen zur Reduktion des „Lösungsbaumes“.

Eine ausführliche Betrachtung gibt [1]. Deswegen werden die Ergebnisse nur für den allgemeinen Fall MKP erläutert.

Für die MKP werden obere Schranken durch die *LP*-, *Lagrange* oder die *Surrogate*-Relaxierung hergeleitet.

Die *LP*-Relaxierung (LP(MKP)) entspricht dem MKP-Modell ohne die ganzzahligen Restriktionen.

Bei der *Surrogate*-Relaxierung  $S(\text{MKP}, \mu)$  werden die  $m$ -Kapazität-Restriktionen in einer Restriktion durch einen  $m$ -dimensionalen nicht-negativen Vektor  $-\mu$  zusammengefasst,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ .

Das relaxierte Problem  $S(\text{MKP}, \mu)$  ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \\
 \text{s.t.} & \sum_{j=1}^m \mu_j \sum_{i=1}^n w_i x_{ij} \leq \sum_{j=1}^m \mu_j c_j \\
 & \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad i=1, \dots, n \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m
 \end{array}$$

**Satz 4.2.1** Für jede Instanz von MKP ist die optimale Wahl der Multiplikatoren  $\mu_i = k$  für  $k > 0 \forall i \in I$ . (vgl.[3])

Das resultierende SKP kann exakt gelöst werden und liefert eine obere Schranke für den Zielfunktionswert des MKPs. Nach dem Beweis von Martello and Toth (siehe [3]) gilt:

**Satz 4.2.2**  $z(\text{LP}(\text{MKP}))=z(\text{LP}(\text{S}(\text{MKP},1)))$ .

Gegeben ist ein Vektor mit nicht-negativen Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Die Lagrange-Relaxierung ist in zwei Varianten möglich. Zum einen  $\text{L1}(\text{MKP},\lambda)$ , wobei die  $\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1$  -Restriktionen und zum anderen  $\text{L2}(\text{MKP},\lambda)$ , wobei die  $\sum_{i=1}^n w_i x_{ij} \leq c_j$  Restriktionen relaxiert werden. Die  $\text{L1}(\text{MKP},\lambda)$  gilt als die bessere.

$\text{L1}(\text{MKP},\lambda)$  beschreibt  $m$  unabhängige SK-Probleme mit identischen Kapazitäten und Gewicht, die sich nur in der Kapazität des entsprechenden Rucksacks unterscheiden:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} - \sum_{i=1}^n \lambda_i (\sum_{j=1}^m x_{ij} - 1) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n w_i x_{ij} \leq c_j \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n \end{array}$$

Es gilt für die  $z(\text{L1}(\text{MKP},\lambda)) = \sum_{j=1}^m z_j + \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

Für die *Lagrange*-Relaxierung werden für die beste Wahl der Multiplikatoren  $\lambda$ , mit einer *Subgradient*-Relaxierung, Annäherungswerte bestimmt.

Nach Hung und Fisk (vgl.[1]) sind die Multiplikatoren  $\lambda_i^- := \begin{cases} p_i - w_i p_s / w_s, & \text{wenn } i < s \\ 0, & \text{wenn } i \geq s \end{cases}$

die besten Multiplikatoren für  $C(\text{L1}(\text{MKP},\lambda))$ .

Es gilt  $z(\text{LP}(\text{L1}(\text{MKP},\lambda))) = z(\text{LP}(\text{S}(\text{MKP},1))) = z(\text{LP}(\text{MKP}))$ . Es gilt für die polynomielle obere Schranke  $U$  für MKP:

**Satz 4.2.3**  $U \leq (m + 1)z^*(\text{MKP})$ . (vgl.[1])

Es gibt verschiedene Varianten der Branch-and-Bound-Algorithmen für MKP u.a. von Hung und Fisk, die einen „depth-first-branch-and-bound“ Algorithmus vorschlagen. Die obere Schranke wird durch die *Lagrange*-Relaxierung errechnet. Branching erfolgt an dem Gegenstand  $i$ , der am meisten in der Lösung der relaxierten Probleme vorkommt. Für jeden Gegenstand  $i$  werden  $m+1$  neue Zweige generiert. Die Gegenstände werden in aufsteigender Reihenfolge  $den$ , in der absteigenden Reihenfolge der Kapazitäten sortierten Rucksäcken, zugewiesen, d.h., es gibt  $m$  Branch-Zweige die den Gegenstand  $i$  einem der Rucksäcke zuordnen ( $x_{ij}=1, j=1, \dots, m$ ) und einen Branch-Zweig der den Gegenstand vom Problem ausschließt: ( $x_{ij}=0$  für alle  $j$ ).

Bei dem Branch-and-Bound-Algorithmus von Martello und Toth [3] wird für das MKP an jedem Gegenstand die *Lagrange*-Relaxierung:  $\text{L1}(\text{MKP},\lambda)$  mit  $\lambda_i=0$  für alle  $i=1, \dots, n$  gelöst, d.h. Weglassen der Restriktion  $\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1$ . Einschließlich erfolgt das Branching

an dem Gegenstand, der mehr als einem Rucksack des relaxierten Problems zugeordnet wurde, d.h. bei  $\sum_{j=1}^m x_{ij} > 1$ . Bei dem Branching werden  $j$ -Knoten generiert. Bei der Menge  $(j-1)$  von diesen Knoten ist  $x_{ij}=1$  für die korrespondierenden Rucksäcke und für einen gilt  $x_{ij}=0$ .

Folgende drei Problem-Aspekte wurden von Martello und Toth (vgl. [1]) für MKP definiert:

- Allgemeine Gültigkeit, der durch *Surrogate*-Relaxierung oder *Lagrange*-Relaxierung errechneten oberen Schranke
- Die Existenz von guten unteren Schranken zum Abschneiden der Knoten bei der Enumeration in den Branch-and-Bound-Algorithmen
- Kenntnisse zum Leiten des Branchings für eine bessere zulässige Lösung sind erforderlich

Martello und Toth schlagen bezüglich dieser Aspekte den folgenden MTM-Algorithmus vor:

**MTM**( $\tilde{j}, P, c_1, \dots, c_m$ )  
 Löse die S(MKP,1) zum Bestimmen einer oberen Schranke U  
 mit  $c := \sum_{j=1}^m c_j$   
 Untere Schranke  $z'$  durch die Greedy bestimmen; Lösung  $x(G)$   
 Wenn  $(P+z' > z^L)$  dann  

$$x_{ij}^* := \begin{cases} x_{ij}, & \text{für } (i,j) \in T \\ x_{ij}(G), & \text{für } (i,j) \notin T \end{cases}$$

$$z^L := P + z'$$
 END  
 Wenn  $(P+U > z^L)$  dann  
 Suche einen Gegenstand k für den  $x_{k\tilde{j}}=1$  und  $(k,\tilde{j}) \notin T$  gilt  
 Wenn kein k existiert wird  $\tilde{j}$  erhöht. Wiederhole die Suche  
 $T := T \cup (k, \tilde{j})$   
 $x_{k\tilde{j}} := 1 \Rightarrow$   
 rekursiver Aufruf **MTM** ( $\tilde{j}, P + p_i, c_1, \dots, c_{\tilde{j}} - w_k, \dots, c_m$ )  
 $x_{k\tilde{j}} := 0 \Rightarrow$   
 rekursiver Aufruf **MTM** ( $\tilde{j}, P, c_1, \dots, c_m$ )  
 $T := T / (k, \tilde{j})$   
 END

Abbildung 6: MTM-Algorithmus

MTM ist ein „Bound-und-bound“-Algorithmus, wobei an jedem Knoten im Branch-Baum eine obere und untere Schranke bestimmt wird. Entscheidend ist, dass eine heuristische Lösung vorhanden ist, die eine untere Schranke für den Wert der Lösung liefert, um manche Zweige abzuschneiden.

Dieser Algorithmus liefert obere Schranken an jedem Knoten durch die *Surrogate*-Relaxierung des MKPs. Untere Schranken (sogenannten Single-Knapsack-Schranken) werden bei der Berechnung von  $m$ -unabhängigen SKP folgendermaßen bestimmt:

Der erste Rucksack  $j=1$  wird optimal gefüllt und die zugeordneten Gegenstände danach aus der Menge entfernt. Das passiert  $m$ -mal bis alle Rucksäcke gefüllt sind. Die Rucksackkapazitäten  $c_j$  sind aufsteigend und die Gegenstände bzgl. ihrer Effizienz  $e_i=p_i/w_i$  absteigend sortiert. So erfolgt jedes Branching am Knoten mit der größten Effizienz nach dem Greedy-Prinzip. An jedem Knoten werden zwei Branching-Knoten generiert. Der eine Knoten fügt den Gegenstand  $i$  zu dem ausgewählten Rucksack  $j$  und der andere entfernt ihn von diesem. Zu jedem Zeitpunkt müssen die  $\tilde{j}$ -Rucksäcke vor dem Rucksack  $\tilde{j}+1$  gefüllt werden. Eine Liste  $\mathbf{T} = (i_1, j_1), \dots, (i_d, j_d)$  enthält alle Indizes der Variablen  $x_{ij}$ , die auf 0 oder 1 während des Branchings fixiert wurden.

Der aktuelle Lösungsvektor ist  $x$  und der optimale Lösungsvektor  $x^*$ . Der Profit der aktuellen fixierten Variablen ist  $P$  und  $c_1, \dots, c_m$  zeigen die aktuell restlichen Kapazitäten. Initialisiert sind die Variablen  $x_{ij}, x_{ij}^*$  und die untere Schranke  $z^L$  auf 0. *MTM*(1, 0,  $c_1, \dots, c_m$ ) wird rekursiv aufgerufen. In dem ersten Teil des *MTM*-Algorithmus wird ein *MT1*-Algorithmus zum Lösen des relaxierten Problems  $S(MKP, 1)$  verwendet. Nach jedem Schritt, wobei  $x_{ij} = 1$  nach der Greedy-Lösung  $x(G)$  gesetzt wird, ändern sich die untere Schranke  $z^L$  und der Lösungsvektor  $y$  bei dem Branching nicht. Auf diese Weise müssen  $y$  und  $z^L$  nur bestimmt werden nach dem Branching in der Form  $x_{ij} = 0$ .

Die Weiterentwicklung einiger Punkte durch Pisinger liefert den *Mulknap*-Algorithmus. Untere Schranken werden ermittelt durch das Lösen einer Serie von „Subset-Sum-Problemen“ (vgl.[1]) durch einen Algorithmus von Horowitz und Sahni. Dieser wird hier aber nicht näher erläutert. Durch diesen werden die Kapazitätsrestriktionen für jeden Rucksack um die „Single-knapsack-GAP“ nach unten reduziert. Obere Schranken werden durch die *Surrogate*-Relaxierung des MKPs berechnet. Außerdem werden effiziente Reduktionsregeln zur Bestimmung der Gegenstände angewandt, die in keinen Rucksack gepackt werden können.

Folgende Unterschiede gibt es zwischen *MTM* und dem *Mulknap*-Algorithmus:

1. Eine andere Strategie für bound-and-bound, die auf dem Aufsplitten der Lösung der *Surrogate*-Relaxierung ( $S(MKP,1)$ ) basiert .
2. An jedem Knoten Verminderung der Gegenstände.
3. An jedem Knoten engere Kapazitäten.

Die wesentlichen Ideen zum **Mulknap-Algorithmus** sind:

- Möglichkeit zur Gültigkeit der  $S(MKP,1)$ -Lösung durch Lösen einer Serie von Subset-Sum-Problemen, indem die ausgewählten Gegenstände in die  $m$ -Rucksäcke aufge-

teilt werden können. Angenommen  $z(S(\text{MKP},1))$  ist bekannt. Wenn man die Gegenstände in der Lösung auf einen der  $m$ -Rucksäcke unter der Einhaltung der gegebenen Restriktionen aufteilen kann, so entspräche die Lösung des Ursprungsproblems der oberen Schranke. Andernfalls ist das Ergebnis eine zulässige Lösung aus einer Teilmenge der Gegenstände.

- Durch Subset-Sum-Probleme werden die Kapazitätsrestriktionen für jeden Rucksack reduziert.
- Die Branching-Methode basiert auf der binären Aufteilung, so dass ein Gegenstand  $i$  entweder zu einem Rucksack  $j$  oder nicht gehört.
- Aufsteigend sortierte Kapazitäten der Rucksäcke, wobei der kleinste zuerst gepackt wird.
- Zu jedem Zeitpunkt sind Gegenstände  $i \leq h$  beim Branching fixiert, deswegen werden nur Gegenstände  $i > h$  betrachtet, wenn die obere und untere Schranke bestimmt werden.
- Zur Erkennung der eliminierten Gegenstände gibt die Variable  $d_i$  für jeden Gegenstand  $i$  an, dass eine Zuordnung dieses Gegenstands nur in Rucksäcke  $j \geq d_i$  möglich ist.
- Aktueller Lösungsvektor ist  $x$ ,  $P$  ist die Summe der Profite der fixierten Gegenstände.
- Die *Surrogate*-Relaxierung wird durch den „Minknap“-Algorithmus (vgl.[1]) gelöst. Die Variablen müssen zum Schluss erneut richtig für Mulknap angepasst werden, da in Mincap eine eigene Permutation von diesen generiert wird.
- Subset-Sum-Probleme werden mit dem „Decomp“-Algorithmus (vgl.[1]) gelöst.
- Initialisierung: aufsteigende Kapazitäten  $c_j$ ,  $z^L = 0$ ,  $d_i = 1$ ,  $x_{ij}^* = y_{ij} = 0$  für alle  $i, j$  vor dem Aufruf  $\text{Mulknap}(0,0,c_1, \dots, c_m)$ .

**Mulknap** ( $h, \mathbf{P}, c_1, \dots, c_m$ )

Reduziere die Kapazitäten  $c_j$  durch  $m$  Subset-Sum-Probleme mit den Gegenständen  $h+1, \dots, n$  (Decomp-Algorithmus)

Lösen von S(MKP,1) mit  $c := \sum_{j=1}^m c_j$  Sei die Lösung

$\hat{y}$  und  $z(\hat{y}) := U$  (Algorithmus- Minknap)

$z^L$  ist die aktuell beste Lösung

Wenn  $(P+U > z^L)$  dann

Aufsplitten der Lösung  $\hat{y}$  auf die  $m$ -Rucksäcke

durch Lösen einer Serie von Subset-Sum-Problemen

mit den Gegenständen in der Lösung- $\hat{y}$ , für die  $\hat{y}_i=1$  gilt.

Sei  $y_{ij}$  die optimale Bepackung des Rucksacks  $j$  mit Profitsumme  $z_j$

Weiterentwicklung mit Greedy zu einer heuristischen Lösung mit

$$\sum_{i=h+1}^n w_i y_{ij} < c_j$$

Wenn  $(P + \sum_{j=1}^m z_j > z^L)$  dann

$$x_{ij}^* := \begin{cases} y_{ij}, & \text{für } i \geq h \\ x_{ij}, & \text{für } i < h \end{cases}$$

$$z_L := P + \sum_{j=1}^m z_j$$

END

END

Wenn eine Verbesserung erzielt wurde  $(P+U > z^L)$  dann

Reduzierung des Restproblems (vgl.[1] Kapitel 10.2.1 )

und packe die verbleibenden Gegenständen in die erste Position.

Erhöhe  $h$ .

Sei  $j$  der kleinste Rucksack mit  $c_j > 0$

Löse SKP mit den freien Variablen, wobei die Rucksackkapazität

$c := c_j$  definiert wird. Sei  $\bar{y}$  die Lösung.

Wähle den Branching-Gegenstand  $k$  mit der größten Effizienz

unter den Gegenständen mit  $\bar{y}=1$ .

Packe  $k$  an der Stelle  $h+1$  und setze  $i := h+1$ .

$$x_{ij}=1 \Rightarrow$$

**Mulknap** ( $h+1, \mathbf{P}+p_i, c_1, \dots, c_j - w_i, \dots, c_m$ )

$$x_{ij}=0, d' := d_i, d_i=j+1 \Rightarrow$$

**Mulknap** ( $h, \mathbf{P}, c_1, \dots, c_m$ )

Finde wieder ein  $i$  und setze  $d_i := d'$

END

Abbildung 7: Mulknap-Algorithmus

Das dieser Arbeit zugrunde liegende KIP-Modell wurde aufgrund seiner Dimension mit SCIP gelöst. Alternativ hätte man auch den Mulknap-Algorithmus verwenden können.

Anschließend folgt eine kurze Information über eine Publikation für MKP aus dem Jahr 2007.

Der Bin-Completion-Algorithmus wurde im „Journal of Artificial Intelligence Research“ veröffentlicht und soll laut Autoren den Mulknapsack-Algorithmus überbieten, der bisher als der beste gilt. Der Algorithmus ist in Common Lisp implementiert und wurde mit dem MTM und dem Mulknapsack-Algorithmus mit den gleichen Testinstanzklassen getestet indem die Codes entsprechend konvertiert wurden. Für eine Übersicht über die Ergebnisse wird auf [8] verwiesen.

### **Bin-Completion-Algorithmus (BC)**

Der BC-Algorithmus (vgl.[8]) wird für die Klasse der „Bin-Packaging“- Probleme erläutert und entsprechend auf Erweiterungen für andere Problemklassen wie das MKP usw. hingewiesen. Die Idee bei dem, ist ein Rucksack-orientierten Suchraum mit einem Dominanz-Kriterium zu verbinden, um Zweige des Baumes abzuschneiden. Die standard Branch-and-Bound-Algorithmen sind „Gegenstand-orientiert“, d.h., die Gegenstände werden einer nach dem anderen betrachtet und jeder Knoten in dem Suchraum entspricht einer Entscheidung bzgl. der Zuweisung eines Gegenstands. Im Gegensatz dazu ist der BC-Algorithmus „Rucksack-orientiert“ und hat folgende Merkmale:

1. Die Knoten entsprechen maximal zulässigen Zuordnungen von Gegenständen zu einzelnen Rucksäcken. Eine zulässige Zuordnung zu einem Rucksack ist als die Menge aller Gegenstände, die dem Rucksack zugewiesen sind, definiert. Eine zulässige Lösung des Ursprungsproblems besteht somit aus einer Reihe von Rucksack-Zuordnungen, wobei jeder Gegenstand in genau einer Zuordnung enthalten ist und die Summe der Gewichte der Gegenstände die gegebenen Kapazitäten nicht überschreiten darf.
2. MKP-Dominanz-Kriterium (vgl. [8]) wird zwischen Zuweisungen von Gegenständen angewandt, um die Suche zu reduzieren. Zentral im BC-Algorithmus soll die Bestimmung aller zulässigen nicht-dominierten Rucksack-Zuordnungen sein. Bei dem Dominanz-Test werden eingeschlossene Gegenstände mit ausgeschlossenen Gegenständen verglichen und es wird kein Vergleich zwischen einer „Kandidat-Rucksack-Zuordnung“ und vorher erzeugter Rucksack-Zuordnungen durchgeführt.
3. Verbesserung des Verfahrens durch „nogood-basierte Abscheidetechniken“ (kurz NP bzw. NPD), die eine bessere Ausnutzung des Dominanz-Kriteriums erlauben. Sie dienen zum Bestimmen und Abschneiden von Knoten durch Überprüfung der Rucksack-Zuordnung am aktuellen Knoten auf Erhalt von so genanntem „nogood“. Nogood ist definiert als eine Rucksack-Zuordnung, die zu keiner Lösung führen kann, die besser ist als eine vorher entdeckte Lösung. Mit den Suchfortschritten nach unten im Baum wird eine Liste von nogoods geführt, die die Menge von Rucksack-Zuordnungen ist und mit der gegen die jeder Kandidat für eine nicht-dominierte Rucksack-Zuordnung verglichen wird. In Anbetracht einer Kandidat-Rucksack-Zuordnung, in der die Gegenstände nach ihrem Gewicht sortiert sind,

vergleicht die gegenwärtige Durchführung des Dominanz-Tests für das Nogood-Abschneiden die Gegenstände gegen jeden nogood.

NPD wird in [8] mit der „Abschneidetechnik“ von Focacci und Shaw, die bei dem symmetrischen und asymmetrischen TSP mit Zeitfenstern angewandt wird, verglichen, wobei auf die Unterschiede im Dominanz-Test hingewiesen wird.

Der BC-Algorithmus ist wie folgt gegeben:

```

MKP_bin_completion(bins,items)
  bestProfit =  $-\infty$ 
  search_MKP(bins,items,0)

search_MKP(bins, items,sumProfit)
  if bins== $\emptyset$  or items ==  $\emptyset$ 
    /*we have a candidate solution*/
    if sumProfit > bestProfit
      bestProfit = sumProfit
    return

  /* Attempt to reduce problem.  reducedBinAssignments are
     maximal, feasible assignments of items to bins */
  reducedBinAssignments = reduce(bins,items)
  ri = get_items(reducedBinAssignments) /* items eliminated by reduction */
  rb = get_bins(reducedBinAssignments) /* bins eliminated by reduction */
  if reducedItems  $\neq \emptyset$ 
    search_MKP(bins \ rb, items \ ri, sumProfit+ $\sum_{i \in ri}$  profit(i))
    return

  /* Attempt to prune based on upper bound */
  if (sumProfit + compute_upper_bound(items,bins)) < bestProfit
    return

  bin = choose_bin(bins)
  undominatedBinAssignments = generate_undominated(items,capacity(bin))
  foreach A  $\in$  sort_assignments(undominatedBinAssignments)
    if not(nogood(A)) and not(nogood_dominated(A))
      assign undominated_bin_assignment to bin
      search_MKP(bins \ bin, items \ items_in(A),sumProfit+ $\sum_{i \in A}$ profit(i))

```

Man wendet ein „depth-first-BC-Branch-and-Bound“ Algorithmus an. Jeder Knoten im Suchbaum stellt eine maximal gültige Rucksack-Zuordnung für den aktuellen Gegenstand dar. An jedem Knoten wird die obere Schranke für das restliche Problem durch SMKP (Methode: „*compute\_upper\_bound*“) berechnet. Um evtl. das Problem zu reduzieren, wird das mit der Methode `reduce` eine obere Schranke berechnet.

Dann wird der Rucksack mit der kleinsten Restkapazität ausgewählt (Methode:

„*choose\_bin*“) und seine nicht-dominierten Rucksack-Zuordnungen mit dem *MKP-Dominanz-Kriterium* generiert (Methode: „*generate\_undominated*“) und untersucht. Die Methode:

„*sort\_*

*assignments*“ sortiert nicht-dominierte Zuordnungen absteigend nach ihrer Kardinalität. Nogood pruning, *nogood*, NP, und Nogood dominance pruning werden angewandt (Methode:

„*nogood\_*

*dominated*“). Zum Generieren und Testen aller nicht-dominierten Zuordnungen an einem Knoten wird eine sogenannte „value-ordering-heuristic“<sup>3</sup> benutzt.

#### 4.2.2 Dynamische Programmierung

In [1] wird für die einfachsten Formen von Multiple-Knapsack-Problemen gezeigt (MSSP-1) wobei  $p_i = w_i$  gilt und (B-MSSP), wobei die minimale Ladung pro Rucksack maximiert wird, gezeigt, dass kein pseudo-polynomieller Algorithmus oder vollpolynomielles Approximationsschemata (FPTAS) existiert, bis  $P=NP$  bewiesen wird.

**Satz 4.2.4** Wenn die Anzahl Rucksäcke zwei ist, existiert weder für (MSSP-1) noch für (B-MSSP) ein vollpolynomielles Approximationsschemata (FPTAS).

Für den Beweis sei auf [1] verwiesen.

---

<sup>3</sup>„Von den 11 entwickelten Heuristiken wird die „min-cardinality-max-profit“ als die beste ausgewählt.“[8]

### 4.2.3 Approximationsalgorithmen

Die meisten ganzzahligen und kombinatorischen Problemtypen wie das MKP gehören zu den NP-schweren Problemen, für die kein Algorithmus bekannt ist, der eine Lösung in polynomieller Zeit findet. In der Praxis müssen häufig zusätzliche Nebenbedingungen berücksichtigt werden, was die Probleme in der Regel noch schwieriger macht. Lösungsalgorithmen, die die bestmögliche Lösung durch Kombination aller möglichen Werte für alle Entscheidungsvariablen ermitteln, hätten jedoch bei großen Problemen eine exponentielle Laufzeit und wären damit ineffizient. Wegen der Komplexität der Probleme ist es häufig zufriedenstellend, gute (aber nicht notwendigerweise optimale) Lösungen zu bestimmen. Für viele dieser Probleme lassen sich also Approximationsalgorithmen finden, die in polynomieller Zeit eine Lösung berechnen können. Eine Forderung an solche Approximationsalgorithmen ist, dass die von ihnen berechnete Lösung um einen bestimmten Faktor entfernt von der optimalen Lösung liegen sollte. Die Ergebnisse für MKP sind im nächsten Abschnitt präsentiert.

#### Greedy-Algorithmen

Der nahiegendste Approximationsalgorithmus, ist die Generalisierung des Greedy-Algorithmus durch die Lösung des *LP-Relaxierten Problems*, um eine zulässige Lösung zu bestimmen. Die Gegenstände werden absteigend nach ihrer Effizienz ( $\frac{p_i}{w_i}$ ) sortiert. Die Relaxierung stoppt bei  $m$ -Gegenständen. Sie liefert durch diese  $m$  Gegenstände eine zulässige Lösung  $z^G$  für MKP.

Für jeden Knapsack  $i$  sind die Split-Gegenstände  $s_i$  definiert als:

$$s_i := \min \left\{ k \mid \sum_{j=1}^k w_j > \sum_{l=1}^i c_l \right\}$$

Dem  $i$ -ten Rucksack sind also die Gegenstände:  $s_{i-1} + 1, s_{i-1} + 2, \dots, s_i - 1$  zugeordnet, wobei  $s_0 = 0$  ist. Der absolute Fehler von  $z^G$  ist kleiner als  $\sum_{j=1}^m p_{s_j}$ .

Eine Modifikation des Greedy-Algorithmus gibt der G-Greedy-Algorithmus (Generalized Greedy Algorithm) an. Der G-Greedy liefert die maximale Greedy-Lösung und den größten Profit der gesplitteten Gegenstände.

Initalisiert sind eine aufsteigende Reihenfolge der Kapazitäten der Rucksäcke und eine absteigende Reihenfolge der Effizienz der Gegenstände. Dabei werden für die Rucksäcke  $j \in \{1, \dots, m\}$  die Gegenstände, deren Einpacken die Kapazitätsgrenze überschreiten würde, ausgelassen, d.h., für alle  $j$  mit  $w_j > c_i$  wird  $x_{ij} = 0$  gesetzt. Der oben definierte  $i$ -te Split der Gegenstände  $s_i$  kann dem Rucksack  $i$  zugeordnet werden. Also bilden die  $m$ -Splits eine zulässige Lösung.

**Satz 4.2.5** ([1]) G-Greedy für MKP hat eine Approximationsgüte von  $\frac{1}{2}$ .

Eine andere Vorgehensweise  $G(\epsilon)$  geben Chekuri und Khanna (siehe [2]) an. Bei diesem Algorithmus werden die Rucksäcke einer nach dem anderen gepackt, wobei ein FPTAS (vollpolynomielles Approximationsschema für SKP, siehe Kapitel 4.1.3) für die restlichen

Gegenstände verwendet wird. Der Parameter  $\epsilon$  bezieht sich auf die Fehlertoleranz, die im FPTAS für SKP verwendet wird.

**Satz 4.2.6** ([1])  $G(\epsilon)$  für MKP hat eine Approximationsgüte von  $\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}$ .

Beispiel:

Seien zwei Rucksäcke mit Kapazität  $c_1 > c_2$  und zwei Gegenstände mit Gewicht  $c_2$  und  $c_1$ . Die Gegenstände werden aufsteigend und die Rucksäcke absteigend sortiert und  $G(\epsilon)$  wird den Gegenstand  $c_2$  dem Rucksack 1 zuordnen. Mit dem gleichen Profit von 1 für die beiden Gegenstände gilt für die Optimallösung  $z^* = 2$ , realisiert wird aber nur  $z(G(\epsilon)) = 1$ .

Ein anderer Approximationsalgorithmus für MKP ist gegeben von Martello und Toth [3]. Analog zu  $G(\epsilon)$  werden die Rucksäcke einzeln, aber in aufsteigender Reihenfolge ihrer Kapazitäten gepackt. Und an Stelle von FPTAS wird der *Ext-Greedy*-Algorithmus für SKP (siehe [1]) für die restlichen Gegenstände angewandt. Nach dem Greedy-Schritt werden Verbesserungen durch lokales Vertauschen gesucht. Falls zwei Gegenstände, die verschiedenen Rucksäcken zugeordnet wurden, so vertauscht werden können, dass noch ein Gegenstand mehr in einen der Rucksäcke reinpasst, dann wird diese Änderung vorgenommen. Die Laufzeit des Algorithmus beträgt  $O(n^2)$ . Eine worst-case Analyse wird nicht gegeben.

Auch für MKP existiert ein PTAS.

#### 4.2.4 PTAS

##### PTAS für MKP

1999 wurde von Caprara, Kellerer und Pferschy ein PTAS für (MSSP-1) abgeleitet und für MSSP verallgemeinert. Nachfolgend wurde die von Chekuri und Khanna für MKP angepasst. Auf eine ausführliche Präsentation der Ergebnisse soll hier jedoch verzichtet und nur einige wichtige Punkte beschrieben werden. Zum Nachschlagen sei auf [2] verwiesen.

- Grundlegend ist das Tolerieren einer festen Anzahl von verschiedenen Werten der Problem-Instanzen. Auf diese Weise werden Gegenstände bei den Knapsack-Problemen mit Profit größer als  $\epsilon c$  auf eine Problem-Instanz mit einer festen Anzahl von verschiedenen Profiten reduziert. Um im Gegensatz dazu auf eine PTAS für MKP zu bekommen, werden nur eine logarithmische Anzahl von verschiedenen Profiten und Gewichten benutzt.
- Mit der reduzierten Zahl der verschiedenen Profite und Gewichte wird eine suboptimale Teilmenge, d.h. eine zulässige Teilmenge von Gegenständen, deren Profit mindestens  $(1 - \epsilon)z^*$  ist, geschätzt. Das Schätzen einer Teilmenge  $S$  von Gegenständen bedeutet, eine polynomielle Anzahl von Teilmengen in polynomieller Zeit

zu identifizieren, unter denen sich  $S$  befindet. Die geforderte Teilmenge von Gegenständen kann durch Enumeration gefunden werden.

- Ein anderes Problem ist, eine zulässige Zuordnung für die geschätzte nah-optimale Teilmenge  $S$  zu finden, was auch NP-vollständig ist. Es wird erneut ein Rucksack mit ähnlichen Kapazitäten geschätzt, dem ein Gegenstand zugeordnet ist, ohne zu viel Profit zu verlieren. Die Schätz-Strategie ist von den Rucksäcken  $m$  und ihren Kapazitäten unabhängig.

Im ersten Schritt wird eine Teilmenge von Gegenständen geschätzt:

- $\theta$  schätzen, so dass  $\max\{p_{max}, (1 - \epsilon)z^*\} \leq \theta \leq z^*$ .
- Alle Profite werden durch  $\frac{\epsilon\theta}{n}$  geteilt, so dass jeder Profit maximal  $\frac{n}{\epsilon}$  ist.
- Die Profite nach unten möglichst nah an  $(1 + \epsilon)$  abrunden.

Im zweiten Schritt werden die Gegenstände zugeordnet:

- Strukturieren der Rucksäcke:
  - Aufsteigende Reihenfolge der Rucksäcke in Gruppen  $B_j$ , wobei  $m_j$  die Anzahl Gegenstände in  $B_j$  ist.
  - Gruppierung als kleine Gruppen, wenn  $m_j = 1/\epsilon$ , sonst als große Gruppen.
  - Gegenstände werden als groß zugeordnet, wenn ihr Gewicht das  $\epsilon$ -fache von der Kapazität des Rucksacks ist, dem es zugeordnet wurde. Es wird approximativ versucht alle Gegenstände die als groß gepackt werden, zu bestimmen und anzugeben zu welchen Rucksäcken sie zugewiesen werden.
  - Zuordnung der meist profitabelsten Gegenstände erfolgt in kleinen Rucksäcken: Die Anzahl benötigter Schätzungen beträgt  $n^{O(\ln(1/\epsilon)/\epsilon^3)}$ .
  - Zulässige Zuordnung der großen Gegenstände in den restlichen Rucksäcken
  - Zuordnung der restlichen Gegenstände durch LP.

Auf andere verwandte Problem-Varianten, die Einschränkungen oder Erweiterungen von MKP sind, sei auch auf [1] verwiesen.

## 5 Analysen

Dieses Kapitel fasst alle Rechen-Ergebnisse des KIP-Modells (siehe Kapitel 3.4) mit den reellen Daten aus dem Jahr 2007 zusammen.

Es werden verschiedene Zuordnungen in Abhängigkeit von verschiedenen Zielfunktionen generiert. Es folgt außerdem eine weitere Reihe von Sensitivitätsanalysen, die dem KIP-Modell unterzogen wurde. Die erste Form stellt die Einzelanalyse der Termine zur Begründung einer möglichen Kapazitätserhöhung dar. Es werden dadurch gezielt die potentiellen Termine geliefert, die für eine solche Kapazitätserhöhung in Frage kommen können. Darauf aufbauend wird eine Gesamtkapazität im Modell angenommen und in einer Sensitivitätsanalyse getestet. Weiterhin werden verschiedene Szenarien von Gesamtkapazitätserhöhungen gerechnet. Die entsprechende Anpassung des KIP-Modells für die einzelnen Analysen erfolgt in den jeweiligen Abschnitten. Anschließend wird eine Analyse des Zielfunktionswertes durch die Bestimmung von oberen Schranken durchgeführt.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird eine Konfliktanalyse der Optimalzuordnung zur besseren Transparenz der Ergebnisse vorgestellt.

### 5.1 Testdaten

Testdaten für das KIP-Modell stellen die Anmelde Daten aus dem Jahr 2007 dar:

- 695 Anmeldungen
- 290 Klassen (Total 7168 Schüler) aus 131 Schulen
- 76 Termine mit einer Total-Kapazität von 3367 Plätzen

Die Optimierungsgüte der resultierenden Zuordnung der Klassen zu Terminen wird anhand der alten Zuordnung 2007 verglichen.

Vorerst werden wichtige Definitionen zur Erläuterung der bisherigen Zuordnung als auch für die weiteren Analysen in dieser Arbeit gegeben.

Für die nachfolgenden Analysen werden keine Bedingungen für Konflikten, neuen Schulen und Physiktermine berücksichtigt. Deswegen werden die entsprechenden Restriktionen aus dem Modell entfernt. Das vollständige KIP-Modell wird mit den Daten von 2008 im Kapitel 6 durchgeführt.

So sei die End-Zuordnung 2007 definiert als  $L_W$ . Dies ist die tatsächlich realisierte manuelle Zuordnung von Herrn Weiß. Sie enthält 122 Klassen aus 88 Schulen mit einer Gesamtzahl von 2987 Schülern. Also ist der zugehörige Zielfunktionswert (maximale Schüleranzahl)  $z_W = 2987$ .

$J$  ist die Menge der Termine und sei  $C_J$  die Summe deren Kapazitäten (Basis-Kapazitäten- $c_j$ ). Es gilt  $C_J = \sum_{j \in J} c_j = 3367$  und  $|J| = 76$ .

Für die Zuordnung der Klassen wurden aber in 2007 die Terminkapazitäten  $J$  nachträglich manuell geändert. Die vorgegebenen Kapazitäten einiger Kurse wurden um Parameter

$u_j \geq 0, j \in J$  erhöht. Sei  $J_W \subseteq J$  die Menge der Termine in der Zuordnung 2007 ( $L_W$ ) mit geänderter Kapazität, wobei für die einzelnen Termine die exakte Verteilung der Kapazitätserhöhungen aus 2007 übernommen wurde. Es gilt also:

$$C_{J_W} := \begin{cases} c_j + u_j, & \forall j \in J_W \\ c_j, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt für die Gesamtkapazitätserhöhung  $U_W := \sum_{j \in J_W} u_j = 53, \forall j \in J_W$  und für die Summe der Kapazitäten in  $C_{J_W} : \sum_{j \in J} c_j + U_W$ . Durch  $C_J$  und  $C_{J_W}$  werden also zwei Kapazitätsvorgaben zur nachfolgenden Modellrechnung definiert.

Eine formale Definition bzgl. der zugrundeliegenden Terminkapazitäten für die entsprechenden Modelle ist gegeben als:

KIP.1: Modell KIP mit Kapazitäten  $C_J$

KIP<sub>W</sub>: Modell KIP mit Kapazitäten  $C_{J_W}$

Die genaue Definition der Modelle folgt im Abschnitt 5.2.

Weiter wird zwischen Terminen mit flexibler Kapazität  $F$  und fester Kapazität  $J/F$  im entsprechenden Modell unterschieden, d.h., nur für Termine  $j \in F$  dürfen Veränderungen in der Kapazität vorgenommen werden. Es gilt  $|J/F|=50, |F|=26$ . Die Menge  $F$  wird im Voraus gegeben.

Weitere spezielle Annahmen bzgl. der zu rechnenden Modelle werden in den zugehörigen Analyse-Abschnitten erläutert.

Folgende Schritte zur Optimierung des Zuteilungsprozesses der Kinder-Uni werden schrittweise durchgeführt:

- Input.txt-Datei wird mit einer Datenbank erstellt
- Rechnen des Modells KIP durch den Solver SCIP
- Implementation von Perl-Scripten zur Ausgabe der Lösung
- Output.txt als Ausgabefile der gerechneten Zuordnung

Anhand der Testdaten ist der Planungsgraph- D der FU-Kinder-Uni von kleiner Dimension. Er enthält lediglich 366 Knoten und 695 Kanten. Es sind insgesamt 1182 Ungleichungen im KIP-Modell. Die benötigte Rechenzeit für das Kinder-Uni-Problem mit dem KIP-Modell beträgt im Schnitt 0,60-0,80 sec. Das Modell wurde auf einem Intel Celeron M Prozessor 360, 40 GB, 512 MB gerechnet. Auch bei dieser recht durchschnittlichen Hardware-Leistung stellt die Rechenzeit keinen Nachteil dar. Insbesondere ist eine Abwicklung in Echtzeit möglich. Auf einem besseren Server würde die Rechnung aber deutlich schneller werden.

Alle Implementationen zu den Dateien sind im Kapitel 10 enthalten.

## 5.2 Zuordnungen in Abhängigkeit der Zielfunktionssetzung

Es ist von großer Bedeutung in einem Entscheidungsprozess wie der der Kinder-Uni-Veranstaltung, die Möglichkeit zur Betrachtung von verschiedenen Zuordnungen des zugrunde liegenden Problems zu haben. Im Gegensatz zu der bisherigen Zuordnung der Anmeldungen zu den Terminen, bei der keine automatisierte Generierung von Zuordnungen zu verschiedenen Zielsetzungen vorhanden ist, wird mit dem KIP-Modell eine flexible Betrachtung des Problems durch die Analyse verschiedener Ziele bzw. Annahmen möglich. Es können automatisch Alternativen gerechnet werden, so dass verschiedene Ergebnisse zur Verfügung stehen. Definiere das (KIP.1)-Modell als Basis-Modell für die nachfolgenden Analysen wie folgt:

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize} & \alpha \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} + \beta \sum_{s \in S} y_s + \gamma \sum_{b \in B} z_b \\
 \text{s.t.} & \sum_{i,j \in A} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in I \\
 & \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} \leq c_j \quad \forall j \in J \\
 & \sum_{i \in I} x_{ij} \geq y_s \quad \forall s \in S \\
 & \sum_{i \in I} x_{ij} \geq z_b \quad \forall b \in B \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in A
 \end{array} \tag{KIP.1}$$

Durch Ein- und Ausschalten der angegebenen Parameter ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) werden die verschiedenen Zielsetzungen erreicht. Diese Gewichtung der Zielfunktion gewährleistet z.B. das Maximieren der Schüler bei  $\alpha = 1$  und alle anderen Parameter = 0 oder Maximieren der Schüler bei gleichzeitigem Maximieren der Schulen (alle Parameter = 1). Die Berücksichtigung verschiedener Bezirke statt Klassen aus dem gleichen Bezirk, wird durch die Bedingung

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq z_b \quad \forall b \in B$$

erreicht. Ein expliziter Eintrag der beteiligten Bezirke in der Zielfunktion ist nicht notwendig, da deren Anzahl viel kleiner ist, als dazu im Vergleich die Anzahl der Schulen und Schüler, d.h., die Bezirke werden immer „überdeckt“. Also entfällt der Teil  $\sum_{b \in B} \gamma z_b$  in der Zielfunktion. Natürlich könnten verschiedene andere Ziele, wie gleichmäßige Berücksichtigung aller Bezirke, „Bestrafung“ von vorher definierten Konflikten usw., in der Zielfunktion vereint werden. Die entsprechende Modifikation kann ohne große Veränderungen im Modell erfolgen und gewährleistet so einen flexiblen Planungsprozess.

Die Abbildung 8 gibt eine Übersicht der maximalen Schülerzahl in Abhängigkeit der festgesetzten Zahl der gewünschten Schul-Beteiligung bei den ursprünglichen Kapazitäten  $C_j$ .

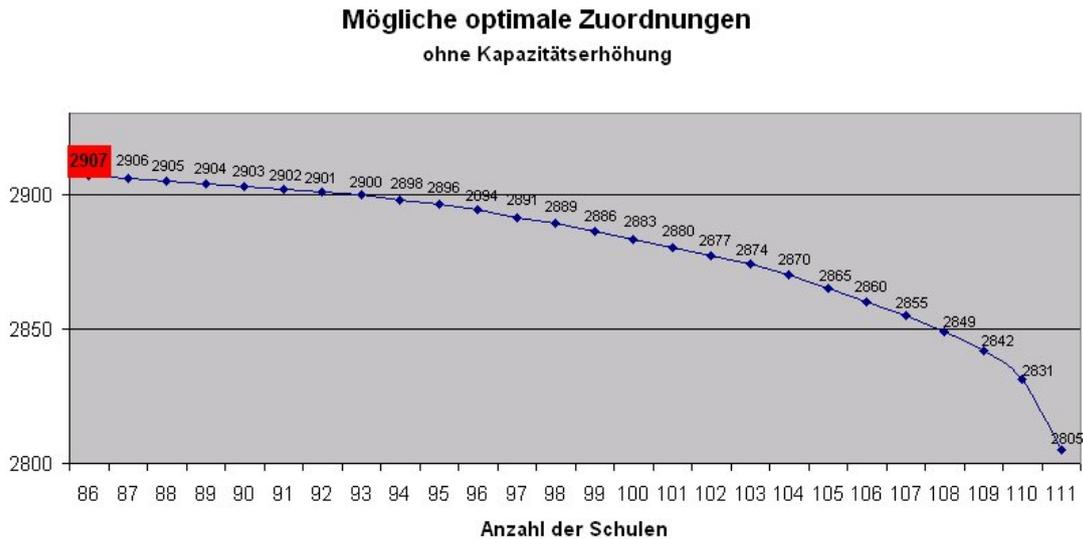


Abbildung 8: Zuordnungen bei den Basis-Kapazitäten

Für die oben dargestellten Zuordnungen wurde mit dem (KIP.1)-Modell und der Zielfunktion

$$\text{maximize } (1 - l) \sum_{i,j \in A} a_{ij} x_{ij} + l \sum_{s \in S} y_s$$

die mögliche Schulanzahl berechnet. Der Parameter  $l \in [0, 1]$  in 0.1- Schritten ändert die Gewichtung der Zielfunktion so, dass seine Werte die Zuordnung mit der Zielsetzung maximale Schulanzahl ( $M$  bei  $l=1$ ) bis zur maximalen Schüleranzahl generieren. Die Anzahl Schüler, zugeteilt bei  $l=0$  wird als die minimale Anzahl möglicher Schulen ( $m$ ) angenommen. Anschließend wird das (KIP.1)-Modell erneut gerechnet, wobei eine Bedingung mit einem Parameter  $\eta$  für die Schulanzahl hinzukommt

$$\sum_{s \in S} y_s = \eta, \eta \in [m, M]$$

und  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$  gilt.  $\eta$  nimmt Werte an, die zwischen der minimalen ( $m$ ) und der maximalen Schulanzahl ( $M$ ) im Modell festgesetzt werden. Die mit dem Modell maximal erreichbare Gesamtschülerzahl beträgt 2907 Schüler aus 86 Schulen. Das Anstreben einer maximalen Schulanzahl von 111 würde einen Absinken der Schüleranzahl um 100 bedeuten.

Die gleiche Rechnung des (KIP.1)-Modells im Fall der Kapazitätsangabe  $C_{J_w}$  ist in Abbildung 11 gegeben.

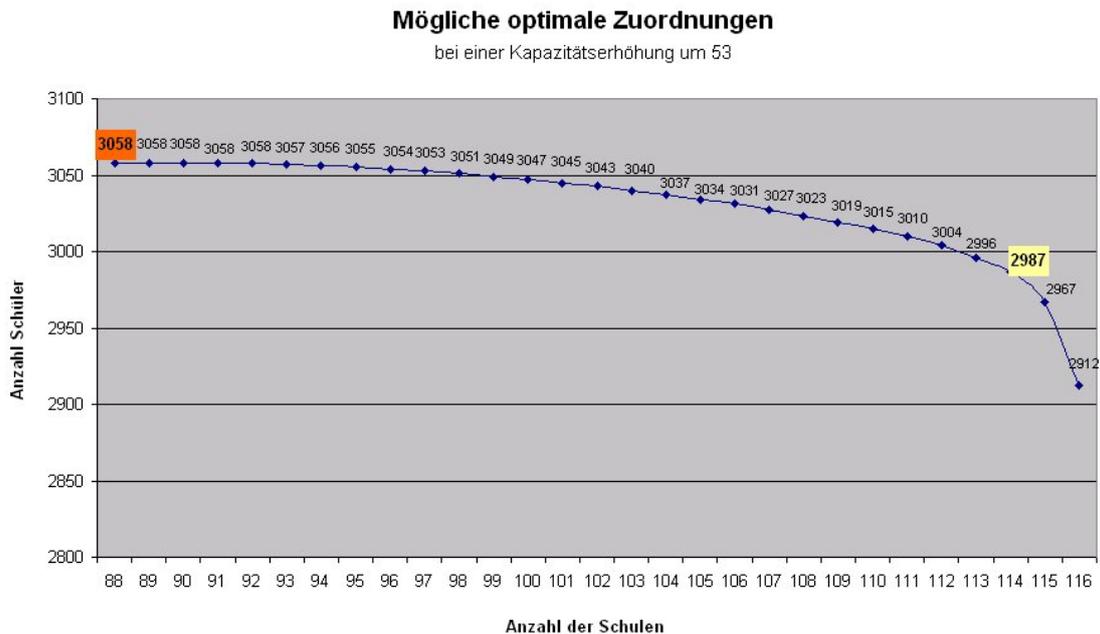


Abbildung 9: Zuordnungen bei einer Kapazitätserhöhung um 53 Plätze

Bei diesen Kapazitätsvorgaben (wie in der Zuordnung 2007) erzielt das  $KIP_W$  maximal 3058 Schüler. Das ist eine Verbesserung gegenüber der Zuordnung von 2007 um 71 Schüler. Die ausführliche Analyse und eine graphische Zusammenstellung der oben gerechneten Zuordnungen zum Vergleich werden in Abbildung 9 gegeben.

Ohne Veränderung der Basis-Angaben enthält die Zuordnung des (KIP.1)-Modells 21 Klassen aus 86 Schulen mit einer Gesamtschülerzahl von 2907. Bei einer vorgenommenen Gesamtkapazitätserhöhung (manuelle Zuordnung  $2007=L_W$ ) von 53 Plätzen auf die Basis-Kapazitäten (ursprüngliche Kapazitäten) ergibt sich eine Erhöhung der Zuordnung von 80 Schülern.

Es folgen eine Reihe von Sensitivitätsanalysen zur Bewertung der Zuordnungen des Modells.

### 5.3 Sensitivitätsanalysen

Das Testen einer optimalen Lösung eines linearen Programms bzgl. einer Veränderung der Eingabedaten bezeichnet man als Sensitivitätsanalyse (Empfindlichkeitsanalyse).

Dieses Kapitel ist folgendermaßen aufgebaut.

Im ersten Abschnitt wird eine Analyse der Zuordnungen in Abhängigkeit der Kapazitätserhöhungen einzelner Termine betrachtet. Danach werden verschiedene Zuordnungen dargestellt, wobei eine Gesamtkapazitätserhöhung  $U > 0$  bzw. Kapazitätserhöhung  $e \in \{1, \dots, 10\}$  für jeden Termin toleriert wird. Die Berechnung von oberen Schranken für den Zielfunktionswert des Modells bei verschiedenen Werten von Kapazitätserhöhungen  $U$  bzw.  $e$  über die Menge aller Termine bildet dem letzten Modellanalyse-Abschnitt.

#### 5.3.1 Einzelbetrachtung-Termine

Eine optimal berechnete Zuordnung zu Basis Kapazitäten  $C_j$  kann nur einen kleinen Teil der Anmeldungen berücksichtigen. Es kann vorkommen, dass nachträglich wie auch für die 2007 Zuordnung Kapazitätserhöhungen vorgenommen werden müssen, um die End-Zuordnung zu verbessern. Der Vergleich der Zuordnungen zeigte, dass damit eine Teilnahme von weiteren 80 Schülern, als bei den ursprünglichen Kapazitäten ermöglicht wurde. Bei der Erhöhung der Terminkapazitäten um 53 Plätze ergab sich damit eine Verbesserung der Zuordnung um 50%. Also wird mit der Kapazitätserhöhung bei manchen Terminen mehr Beteiligung als durch die tatsächlichen zusätzlichen Plätze erreicht. Diese wichtige „Eigenschaft“ einzelner Termine resultiert aus der Größe der Klassen die sich für diesen Termin angemeldet haben und der vorhandenen Terminkapazität. Diese hier vorgestellte Analyse soll automatisch die Information für die Termine liefern. Die Aufgabe ist die Untersuchung der Veränderungen des Zielfunktionswertes, d.h. die maximale Schülerzahl in Abhängigkeit von verschiedenen Kapazitätserhöhungen der einzelnen Termine zu analysieren. Die Überlegung resultiert daraus, im Voraus die Termine zu erkennen, die diese „Eigenschaft“ besitzen, die das Ergebnis positiv beeinflussen können, um so gezielt Maximierung der Schüler mit dem Modell zu schaffen.

Betrachte folgendes Modell:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} && \alpha \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} &+& \beta \sum_{s \in S} y_s &+& \gamma \sum_{b \in B} z_b \\
 & \text{s.t.} && \sum_{i,j \in A} x_{ij} &\leq& 1 && \forall i \in I \\
 & && \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} &\leq& c_j && \forall j \in J/\tilde{j} \\
 & && \sum_{i,\tilde{j} \in A} w_{i\tilde{j}} x_{i\tilde{j}} &\leq& c_{\tilde{j}} + e && 1 \leq e \leq 10, \tilde{j} \in J \\
 & && \sum_{i \in I} x_{ij} &\geq& y_s && \forall s \in S \\
 & && \sum_{i \in I} x_{ij} &\geq& z_b && \forall b \in B \\
 & && x_{ij} &\in& \{0, 1\} && \forall ij \in A
 \end{aligned} \tag{KIP}^{j,e}$$

Es werden Kapazitätserhöhungen  $e$  von 1 bis 10 für jeden Termin  $j \in J$  einzeln angenommen und mit diesen das Modell gerechnet. Bei einer Erhöhung des Zielfunktionswertes

nur um dem Parameter  $e$  wird als Schülerzahl genau die Kapazitätserhöhung erzielt und es wird nichts zusätzlich gewonnen. Wegen der unterschiedlichen Struktur der Daten (Größe der angemeldeten Klassen) wird der Test für alle Termine durchgeführt. Diese Sensitivitätsanalyse liefert die potenziell „stärksten“ Termine, mit denen bei bestimmten Kapazitätserhöhungen die meiste Zuordnung erzielt werden kann. Ausgehend von dem Zielfunktionswert  $z(\text{KIP}^{j,e})$  mit  $e=0^4$  werden neue Zielfunktionswerte  $z(\text{KIP}^{j,e})$  mit Kapazitätserhöhungen  $e$  pro Termin  $j, \forall j \in J$  berechnet, d.h. die maximale Zuordnung bei den geänderten Kapazitäten.

**Definition**

Für  $j \in J$  und  $e \in N$  sei  $Q_j(e) := \frac{z(\text{KIP}^{j,e}) - z(\text{KIP}^{j,0})}{e}$  der Differenzquotient des Termins  $j$  zur Kapazitätserhöhung  $e$ .

D.h. der Differenzquotient  $Q_j(e)$  ist die „Gesamt-Zuordnung“ pro Kapazitätserhöhung  $e$  um eins für den Termin  $j$ .

Bei dieser Analyse für die Planung der FU-Kinder-Uni ist das Ziel, eine möglichst hohe Zahl von  $Q_j(e)$  bei möglichst kleinem  $e$  zu erhalten, damit mit kleinen Veränderungen der Kapazität eine hohe Schülerzahl erreicht wird. Sei der größte Differenzquotient eines Termins  $j$  als  $Q_j^*$ .

**Satz 5.3.1**  $z(\text{KIP}^{j,e}) = z(\text{KIP}^{e,0}) + \sum_{j \in J} e Q_j(e), j \in J$  und  $e \in N$

Eine Überblick der Differenzquotienten aller Termine des Jahres 2007 ist in Abbildung 10 gezeigt.

---

<sup>4</sup>Für den Fall  $e=0$  wird außerhalb dieses Abschnittes weiter das Modell (KIP.1) verwendet.

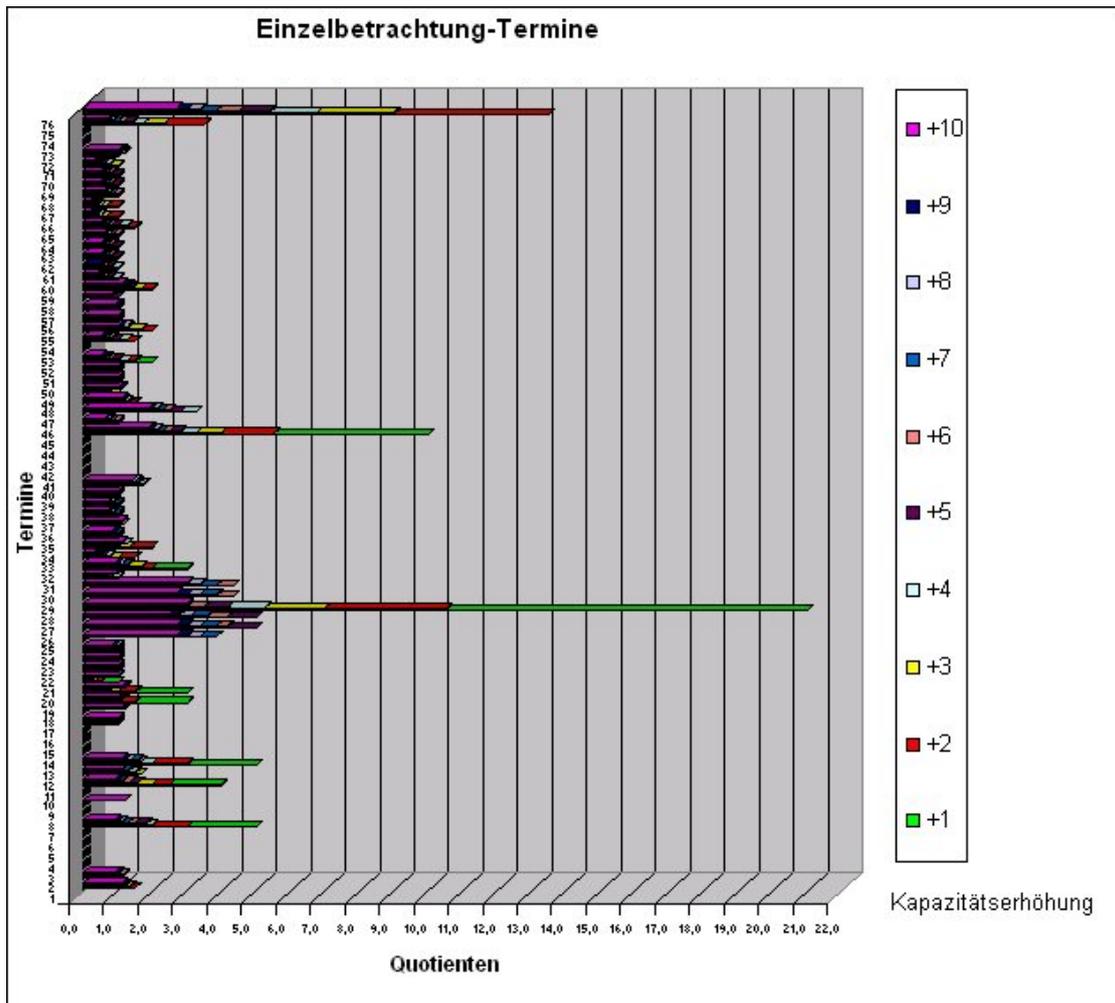


Abbildung 10: Differenzquotienten-Diagramm

Der größte Quotient von 22 ist bei Termin 28 gegeben. In diesem Sonderfall ist der hohe Wert darauf zurückzuführen, dass alle angemeldeten Klassen zu groß für die Termin-Kapazitäten sind. D.h. ohne Kapazitätserhöhung wurde keine Zuordnung stattfinden und der Termin bleibt somit unbesetzt. Die Erhöhung der Plätze um einen Platz reicht, um eine der angemeldeten Klassen zuweisen zu können. In den normalen Fällen, wie bei Termin 46, werden mit einer Kapazitätserhöhung um einen Platz 9 Schüler mehr, d.h. insgesamt 10 zugeteilt. Bei dem Termin 8 steht einer Zuweisung von 25 Schülern eine Kapazitätserhöhung von fünf Plätzen gegenüber.

Nicht nur die Einzelanalysen liefern wichtige Erkenntnisse. Es ist gleichzeitig sinnvoll eine Gesamtkapazitätserhöhung für alle Termine zuzulassen und die Teilmenge der Termine, für die eine Kapazitätserhöhung im Modell sinnvoll ist, automatisch zu bestimmen. So werden die spezifischen Zusammenhänge als Ganzes durch die Anmeldedaten im Modell mit einbezogen. Es ist zu erwarten, dass die geänderten Kapazitäten genau den Termini-

nen mit den größten Differenzquotienten  $Q_j^*(e)$  bei der Einzelanalyse entsprechen. Diese Analyse der Kapazitätserhöhungen im Modell wird im nächsten Abschnitt betrachtet.

### 5.3.2 Kapazitätserhöhung-Analyse

Aus dem Ergebnis des vorherigen Abschnitts folgt, dass eine Analyse der Kapazitätserhöhung der Termine sinnvoll sein kann. Wenn man also eine Kapazitätserhöhung vornehmen möchte und da die Termine verschiedene „Differenzquotienten“ haben, wird eine gezielte statt auf alle Termine gleiche Kapazitätserhöhung wahrscheinlich bessere Resultate liefern. In diesem Abschnitt werden zum Vergleich die Kapazitätserhöhungen über die Menge aller Termine untersucht. Auf diese Weise werden zusätzliche Kapazitäten nur auf die Termine verteilt, wo es notwendig ist. Das zugrunde liegende Modell testet alle Verteilungen einer Gesamtkapazitätserhöhung auf die Termine, um die beste zu finden, wobei nur die Kapazitäten einer relevanten Teilmenge der Termine im Modell verändert wird. Zur Vollständigkeit wird trotzdem auch noch eine Analyse einer gleichen Kapazitätserhöhung getestet.

Die verschiedenen Kapazitätserhöhungs-Szenarien werden in zwei Klassen unterteilt: Kapazitätserhöhung um den gleichen Parameter  $e$  für jeden Termin oder mit einer Kapazitätserhöhung (Parameter  $U$ ) für alle Termine, wobei die einzelnen Termine unterschiedlich um eine Variable  $u_j \geq 0$  erhöht werden können. Die zugrunde liegenden Modelle werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximize} && \alpha \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} + \beta \sum_{s \in S} y_s + \gamma \sum_{b \in B} z_b \\
 \text{s.t.} &&& \sum_{i,j \in A} x_{ij} \leq 1 && \forall i \in I \\
 &&& \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} \leq c_j + u_j && u_j \geq 0, \forall j \in J \\
 &&& \sum_{i \in I} x_{ij} \geq y_s && \forall s \in S \\
 &&& \sum_{i \in I} x_{ij} \geq z_b && \forall b \in B \\
 &&& \sum_{j \in J} u_j = U && U \geq 0 \\
 &&& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall ij \in A
 \end{aligned} \tag{KIP^{J,U}}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{maximize} && \alpha \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} + \beta \sum_{s \in S} y_s + \gamma \sum_{b \in B} z_b \\
 \text{s.t.} &&& \sum_{i,j \in A} x_{ij} \leq 1 && \forall i \in I \\
 &&& \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} \leq c_j && \forall j \in J/F \\
 &&& \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} \leq c_j + u_j && u_j \geq 0, \forall j \in F \\
 &&& \sum_{i \in I} x_{ij} \geq y_s && \forall s \in S \\
 &&& \sum_{i \in I} x_{ij} \geq z_b && \forall b \in B \\
 &&& \sum_{j \in F} u_j = U && U \geq 0 \\
 &&& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall ij \in A
 \end{aligned} \tag{KIP^{F,U}}$$

$KIP^{J,U}$  und  $KIP^{F,U}$  definieren die KIP-Modelle bei einer Gesamtkapazitätserhöhung von  $U$

für alle Termine  $J$  bzw.  $F$ .

Modell  $KIP^{J,53}$  und Modell  $KIP^{F,53}$  stellen ein Spezialfall für eine Gesamtkapazitätserhöhung von 53 für alle Termine  $J$  bzw.  $F$  dar. Es gelte noch  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  und  $\gamma = 0$ . Damit wird eine optimale Zuordnung mit der gleichen Kapazitätserhöhung wie im Jahr 2007 gerechnet (maximaler Anzahl Schüler).

$$\begin{aligned}
& \text{maximize} && \alpha \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} + \beta \sum_{s \in S} y_s + \gamma \sum_{b \in B} z_b \\
& \text{s.t.} && \sum_{\forall ij \in A} x_{ij} \leq 1 && \forall i \in I \\
& && \sum_{\forall ij \in A} w_{ij} x_{ij} \leq c_j + e && e \geq 0, \forall j \in J \\
& && \sum_{i \in I} x_{ij} \geq y_s && \forall s \in S \\
& && \sum_{i \in I} x_{ij} \geq z_b && \forall b \in B \\
& && x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall ij \in A
\end{aligned} \tag{KIP^{J,e}}$$

$$\begin{aligned}
& \text{maximize} && \alpha \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} + \beta \sum_{s \in S} y_s + \gamma \sum_{b \in B} z_b \\
& \text{s.t.} && \sum_{\forall ij \in A} x_{ij} \leq 1 && \forall i \in I \\
& && \sum_{\forall ij \in A} w_{ij} x_{ij} \leq c_j && \forall j \in J/F \\
& && \sum_{\forall ij \in A} w_{ij} x_{ij} \leq c_j + e && e \geq 0, \forall j \in F \\
& && \sum_{i \in I} x_{ij} \geq y_s && \forall s \in S \\
& && \sum_{i \in I} x_{ij} \geq z_b && \forall b \in B \\
& && x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall ij \in A
\end{aligned} \tag{KIP^{F,e}}$$

$KIP^{J,e}$  und  $KIP^{F,e}$  definieren die KIP-Modelle bei einer Kapazitätserhöhung  $e$  für alle Termine  $j \in J$  bzw.  $F$ .

Als erstes Szenarium werden die Modelle  $KIP^{J,U}$  und  $KIP^{F,U}$  mit der Angabe einer Gesamterhöhung  $U$  für die Termine gerechnet.

Die Zuordnung  $z(KIP.1)$  des Modells  $KIP.1$ , lieferte eine Zuordnung von maximal 2907 Schüler aus 86 Schulen und stellt die Zuordnung bei den Basis-Kapazitätsangaben dar. Wie erwähnt, gelten für die Zuordnung 2007 die Kapazitätsannahmen  $C_{J_w}$ . Diese Annahme für das Modell  $KIP.1$  definiert das Modell  $KIP_w$ , mit dem ein tatsächliches Vergleichsergebnis zu der Zuordnung 2007 generiert werden kann. Bei der gleichen Verteilung der Kapazitätserhöhungen auf die entsprechenden Termine exakt wie in 2007 liefert  $KIP_w$  als beste Zuordnung maximal 3094 Schüler aus 94 Schulen. Das bedeutet eine Verbesserung der Zuordnung mit dem Modell um 107 Schülern und 6 Schulen. Es stellt sich die Frage, ob dieses schon gute Ergebnis in Bezug auf die maximale Anzahl von Schülern noch verbessert werden kann. Zur Analyse wurde das Modell  $KIP^{J,53}$  gerechnet. Das testet die Fälle, bei denen eine beliebige Verteilung der zusätzlichen 53 Plätze (der Zuordnung aus 2007) erfolgt. Das Ergebnis verbessert die Zuordnung um weitere 32 Schüler und eine Schule, d.h. 3126 Schüler aus 95 Schulen. Dieser theoretische Wert definiert in der Praxis keine

gültige Zuordnung. Die Erhöhung der Kapazität um einen bestimmten Wert pauschal bei allen Terminen ist nicht möglich. Für manche Termine, zu denen u.a. die „Mit-Mach-Kurse“ (Laborkurse) gehören, stehen nur feste Plätze zur Verfügung, so dass die, im Voraus festgelegte Kapazität, nicht verändert werden darf. Eine weitere Einschränkung wurde als Randbedingung durch das Tolerieren von Kapazitätserhöhungen nur für eine gegebene Teilmenge von Terminen  $F$  definiert. Hier konnte sich der Koordinator der FU-Kinder-Uni auf einige Termine  $F$  festlegen, bei denen eine höhere Teilnehmerzahl zwar nur bedingt wünschenswert ist, bei denen im „Notfall“ aber noch einige Teilnehmer hineinpassen würden. Das entsprechende Modell ist dann das  $KIP^{F,53}$ . Unter der Einhaltung dieser Annahme ist die berechnete Zuordnung maximal 3058 Schülern aus 92 Schulen. Die Zuordnung von  $KIP^{F,53}$  stellt somit eine andere Auswahl von Terminen deren Kapazität geändert werden darf als  $KIP_W$  dar. Die Menge der vorgeschlagenen Teilmenge der Termine  $F$  ( $|F|=26$ ) für eine Kapazitätserhöhung, ist hier nicht identisch mit der Menge von Terminen, die in der Zuordnung 2007 geändert wurden. Sie stellt nur eine Vorgabe von Herrn Weiß als die Idealmenge der Termine dar, die in 2007 erhöht werden durften. Es wurden aber doch noch andere erhöht ( $J_W$ ). Es gilt  $|F \cap J_W| = 8$  und  $|J_W \cap J/F| = 8$  und nicht  $F = J_W$ . Ein direkter Vergleich mit der Zuordnung 2007 zeigt, dass sogar bei der Einschränkung  $F$  der Termine  $J$  ein bessere Zuordnung mit dem Modell gerechnet wird als bei der eigentlichen Zuordnung 2007.

Eine Zusammenfassung der beschriebenen Ergebnisse ist in Abbildung 11 zu sehen. Alle Zuordnungen des Modells überragen die Zuordnung von 2007.

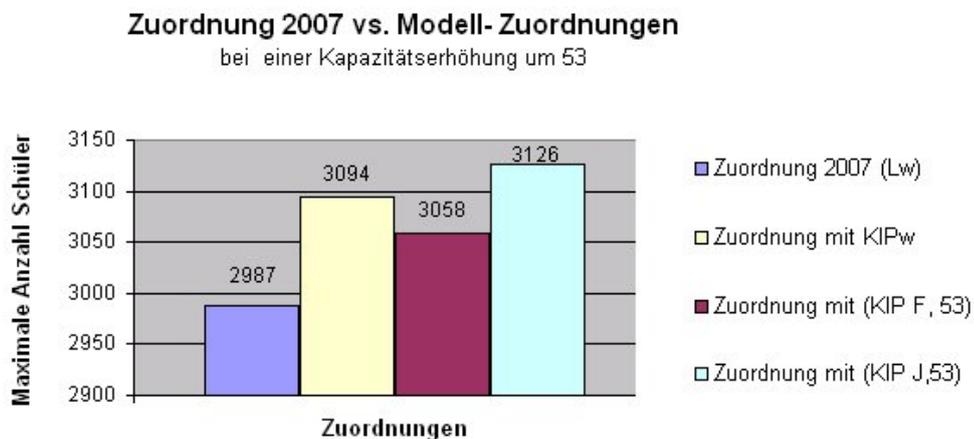


Abbildung 11: Zuordnungsvergleich-Kinder-Uni 2007

Um eine allgemeine Aussage über das Verhalten des Modells  $KIP.1$  bzgl. anderer Gesamtkapazitätserhöhungen  $U \in \{10, 15, 20, 30, 40, 50, 60\}$  zu geben, werden die Zuordnungen der Modelle  $KIP^{F,U}$  und  $KIP^{J,U}$  gerechnet. (Abbildung 12).

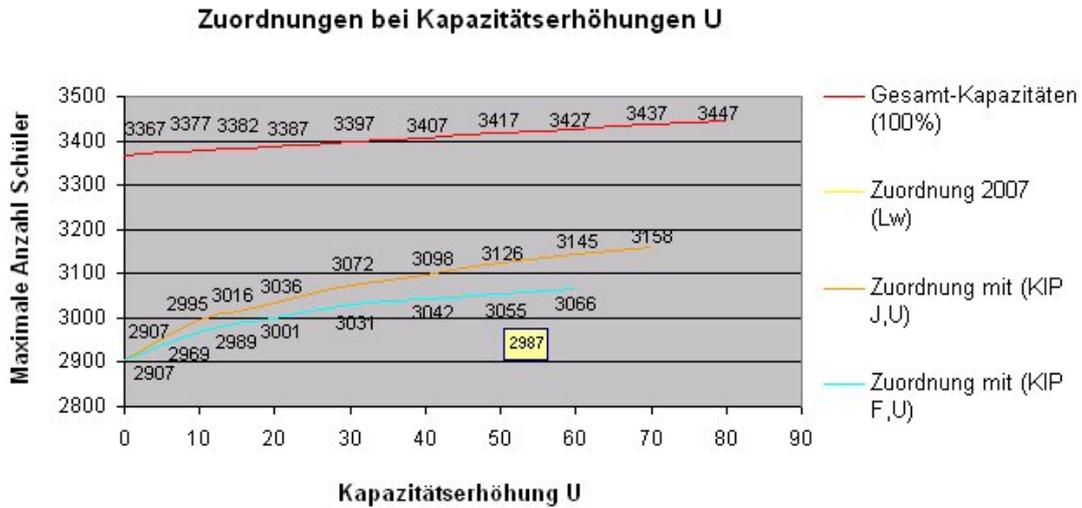


Abbildung 12: Zuordnungen bei verschiedenen Kapazitätserhöhungen U

**Satz 5.3.2** Satz:  $z(KIP^{J,U}) \leq z(KIP^{J,0}) + \sum_{j \in J} u_j Q_j(u_j)$ , wobei  $\forall j \in J$  und  $U = \sum_{j \in J} u_j$  gilt.

Als Beispiel wird die Kapazitätserhöhung  $U = 10$  betrachtet. Nach dem Lösen des  $KIP^{F,10}$  mit dem Ergebnis  $z(KIP^{F,10}) = 2969$  wurden die Termine ermittelt, deren Kapazität im Modell erhöht wurde. Es gibt für den Termin 7 eine Kapazitätserhöhung um einen Platz, für den Termin 26 um 5 Plätze, für den Termin 28 um einen Platz, für den Termin 45 um einen Platz und für den Termin 76 um 2 Plätze (Summe ist 10). Wenn dann die Differenzquotienten  $Q_j(e)$  betrachtet werden, wobei j der Termin und e die entsprechende Kapazitätserhöhung ist, folgt, dass jeder Termin wie erwartet genau bei dem konkreten e, den höchsten Quotient hat. In der nächsten Tabelle sind die Differenzquotienten zusammengestellt.

Kapazitätserhöhung e	Termin 7	Termin 26	Termin 28	Termin 45	Termin 76
+1	<b>5</b>	0	<b>21</b>	<b>10</b>	0
+2	3	0	10,5	5,5	<b>13,5</b>
+3	2	0	7	5,5	9
+4	2	0	5,25	3,25	6,75
+5	1,8	<b>5</b>	4,2	2,8	5,4
+6	1,5	4,16	3,5	2,5	4,5
+7	1,28	3,85	3	2,28	3,85
+8	1,12	3,37	2,62	2,12	3,37
+9	1	3	2,33	2	3
+10	0,9	2,7	3	1,9	2,7

Tabelle 1: Differenzquotienten der Termine 7, 26, 28, 45 und 76

Die Summe der Schüler aus den Differenzquotienten für die Termine 7, 26, 28, 45 und 76 (Tabelle 1) ergibt 88 Schüler mehr Beteiligung, die zum  $z(\text{KIP.1}) = 2907$  hinzu kommen. Für die Zuordnung  $z(\text{KIP}^{\text{F},10}) = 2969$  gilt also  $2969 = z(\text{KIP}^{\text{F},10}) \leq z(\text{KIP.1}) = 2907 + 88$ .

Wenn man die Funktionen in der Abbildung 12 betrachtet, erkennt man eine große „Spanne“ zwischen den Funktionen der zur Verfügung stehenden Kapazitäten und der der optimalen Modell-Zuordnung. Sie wird im nächsten Abschnitt einer Analyse unterzogen.

Das zweite Szenarium liefert die Zuordnung des Modells  $\text{KIP}^{\text{F},e}$  (Abbildung 13) und  $\text{KIP}^{\text{J},e}$  wobei  $e \in \{1, \dots, 10\}$  als theoretische Werte zu betrachten sind, da eine gleichmäßige Kapazitätserhöhung aller Termine F bzw. J nur ein Spezialfall darstellt, bei dem keine Eigenschaften der Anmelde-Daten berücksichtigt werden.

Die Übersicht der Ergebnisse ist in Abbildungen 13 und 14 dargestellt.

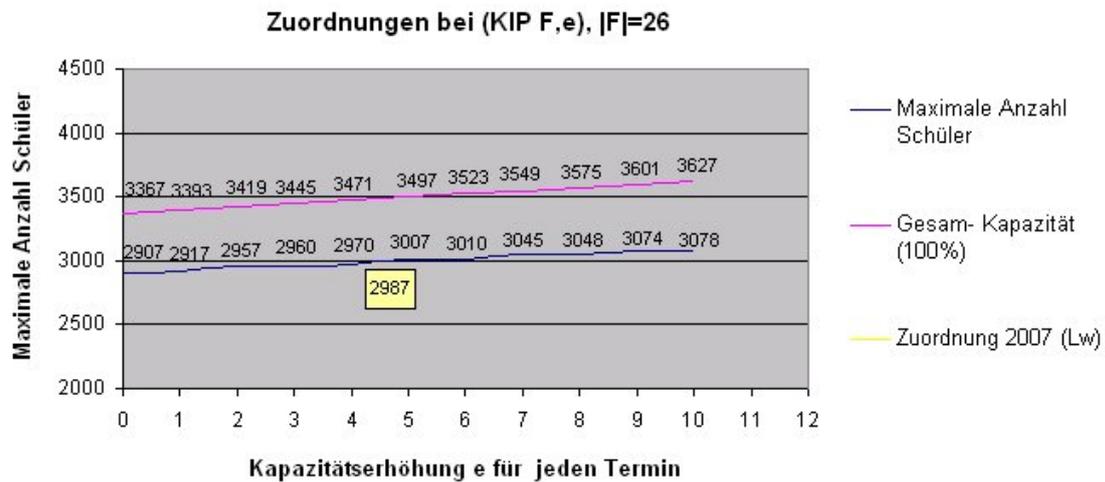


Abbildung 13: Zuordnungen bei verschiedenen Kapazitätserhöhungen e pro Termin

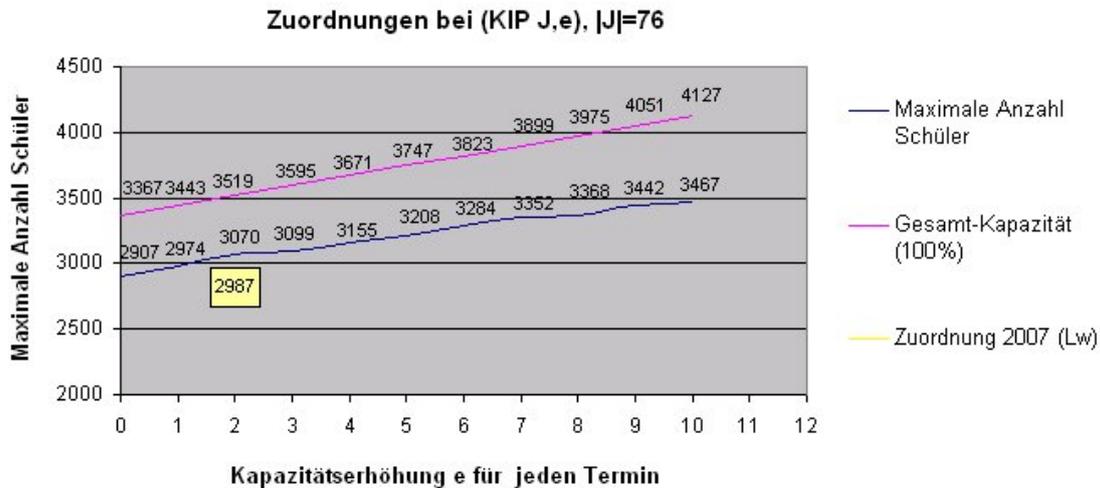


Abbildung 14: Zuordnungen bei verschiedenen Kapazitätserhöhungen  $e$  pro Termin

Hier erkennt man, den fast parallelen Verlauf der Kurven und die deutlich schlechteren Ergebnisse. In Abbildung 14 entspräche die Zuordnung 2007 einer Kapazitätserhöhung von 1,14 für jeden Termin. Multipliziert mit der Anzahl der Termine ( $J=76$ ) ergibt sich eine Kapazitätserhöhung von  $86,64 \approx 87$  Plätze um auf eine Zuordnung von 2987 Schüler zu kommen. In Abbildung 13 geht man genauso vor und erhält eine Kapazitätserhöhung von 4,46 pro Termin. Diese bedeutet bei  $F=26$  eine Kapazitätserhöhung von 115,96 um auch hier auf die Zuordnung von 2007 zu kommen. Insgesamt fallen diese Kapazitätserhöhungen umfangreicher aus als mit dem manuellen Ergebnis von 53 erzielt wurde.

### 5.3.3 Single-Knapsack-Schranke

In diesem Abschnitt werden obere Schranken für die Zuordnung mit dem Modell (KIP.1) betrachtet. Es gelte für die Zielfunktion in diesem Abschnitt die Annahme  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  und  $\gamma = 0$ .

Um die errechnete Zuordnung beurteilen und erklären zu können, werden Erkenntnisse gebraucht, woraus sich die „Spanne“ (kurz GAP) zwischen der optimalen Zuordnung und den vorhandenen Kapazitäten zusammensetzt. So könnte eine Aussage formuliert werden, um wie viel eine berechnete Zuordnung noch verbessert werden kann.

Die Auswertung der Testdaten liefert eine durchschnittliche Klassengröße der angemeldeten Klassen von 25, wobei die durchschnittliche Terminkapazität 44 beträgt. Das führt zu einem durchschnittlichen GAP von 40 %, der unbesetzt bleiben wird. Es ist verständlich, dass durch die Größe der angemeldeten Klassen zu einem Termin und dessen Kapazität sich beim Maximieren der Auslastung ein GAP ergeben kann, für den keine Zuordnung einer Klasse möglich ist. Eine detaillierte Analyse ist unten gegeben.

Als erstes werden iterativ für jeden Termin  $j \in \{1, \dots, m\}$   $J := \{j\}$  gesetzt. Definiere für das Modell (KIP.1) das Single-Knapsack-Problem zu  $j$  als  $KIP_S^j$  wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \text{maximize} && \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} \\
& \text{s.t.} && \sum_{i,j \in A} x_{ij} \leq 1 && \forall i \in I \\
& && \sum_{i,j \in A} w_{ij} x_{ij} \leq c_j && j \in J \\
& && \sum_{i \in I} x_{ij} \geq y_s && \forall s \in S \\
& && \sum_{i \in I} x_{ij} \geq z_b && \forall b \in B \\
& && x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall ij \in A
\end{aligned} \tag{KIP_S^j}$$

Es werden somit  $m$ -unabhängige Single-Knapsack-Probleme  $\text{KIP}_S^j$  gerechnet.

Sei  $Sgap_j = c_j - z(\text{KIP}_S^j)$  der GAP des Termins  $j$ . Es gilt, dass  $Sgap_j$  die Differenz zwischen der Kapazität des Termins  $j$  und des Zielfunktionswertes ist. Die Menge der Termine  $j$ , so dass  $Sgap_j > 0$ , sei als  $J_S$  definiert.

Der Gesamt-GAP  $\text{SGAP} := \sum_{j \in J_S} Sgap_j$  ist durch die Summe der GAP's aller Termine definiert und liefert somit den Fehler, der durch die Struktur der Testdaten entsteht.

#### **Definition**

Sei die Single-Knapsack-Schranke  $\text{SKS} := \sum_{j \in J} c_j - \text{SGAP}$  als die obere Schranke für die Kapazitäten aller Termine der FU-Kinder-Uni definiert.

Mit Kapazitäten  $C_J$  ergibt sich somit ein **SGAP** von 302 Plätzen, was eine Single-Knapsack-Schranke von 3065 entspricht.

#### **Definition**

Definiere  $\text{SKS}(\text{KIP.1})$  als das KIP-Modell zu der Single-Knapsack-Schranke. Es gilt für

$$\text{die Terminkapazität } c_{J_S} := \begin{cases} c_j - Sgap_j, & \text{wenn } j \in J_S \\ c_j, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Diese Analyse wird auf gleicher Weise für die Fälle mit pauschaler Kapazitätserhöhung  $U \in \{10, 15, 20, 30, 40, 50, 60\}$  durchgeführt. Es gilt die Annahme, dass Kapazitätserhöhungen nur für die Termine  $F$  toleriert werden. Es ist praxisnah, dass nicht allen Terminen Kapazitätserhöhungen zu zumuten sind. Es ist also immer eine Teilmenge von Terminen  $F \subseteq J$  gegeben, deren Kapazitäten erhöht werden dürfen.

Um die **SGAP**-Rechnung durchzuführen, wird statt der Basiskapazitäten  $C_J$  eine manuelle Modifikation der Kapazitäten vorgenommen.

Nach der Zuordnung des  $\text{KIP}^{F,U}$ - Modells wurden die erhöhten Kapazitäten in der Zuordnung statt der ursprünglichen Kapazitäten für diese Termine gespeichert. Anschließend wurden erneut die unabhängigen Single-Knapsack-Probleme  $\text{KIP}_S^j$  für jeden Termin  $j$  jeweils mit den neuen Kapazitäten gelöst. Sei  $u_j$  mit  $\sum_{j \in F} u_j = U$  die im Modell erhöhte Kapazität für den Termin  $j$ . Daraus ergibt sich bei der entsprechenden Kapazitätserhöhung  $U$  ein Gesamt-GAP  $\text{SGAP}_U$ . Die Differenz zwischen den gesamten vorhandenen

Plätzen für die entsprechende Kapazitätserhöhung  $U$  d.h.  $\sum_{j \in F} c_j + U$  und  $SGAP_U$  definiert analog die Single-Knapsack-Schranke für die zugehörige Modell-Zuordnung. Sie ist eine obere Schranke für den Zielfunktionswert des Modells (KIP.1) bei den entsprechenden Kapazitäten.

**Satz 5.3.2** Sei ein MKP KIP.1 (vgl.5.2) gegeben. Es gilt  $z(\text{KIP.1})=z(\text{SKS}(\text{KIP.1}))$ .

Die Funktionsverläufe der Single-Knapsack-Schranken bei Kapazitätserhöhungen  $U$  stellt die Grafik in Abbildung 15 dar. Deren Abstand zu den vorhandenen Kapazitäten bleibt relativ gleich.

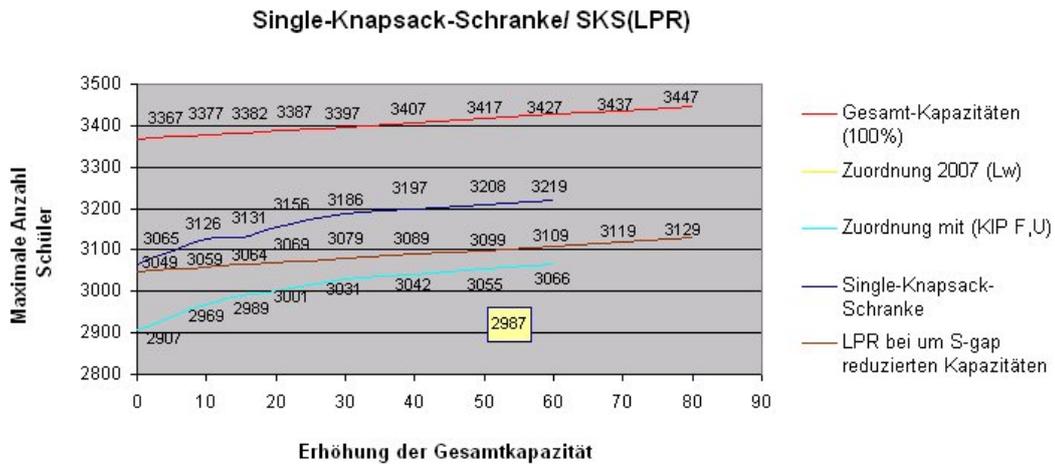


Abbildung 15: Single-Knapsack-Schranke/LPR-Schranke bei verschiedenen Kapazitätserhöhungen  $U$

Zusätzlich zur besseren Beurteilung der Ergebnisse (und zur Erhöhung des allgemeinen Verständnisses bzgl. der schon erwähnten „Spanne“) ist es sinnvoll, sich mit einer anderen Schranke zu beschäftigen, der LP-Relaxierung (kurz LPR). LPR entsteht aus dem Modell KIP.1, wenn die Ganzzahligkeitsbedingungen weggelassen werden. Dabei wird der Fehler in der Lösung hingenommen, der mit der Relaxierung der Ganzzahligkeitsbedingung einhergeht. Der Zielfunktionswert  $z^{LPR}$  der optimalen Zuordnung der LPR mit den um die Single-Knapsack-Schranke reduzierten Kapazitäten, ergibt somit eine obere Schranke für die optimale, ganzzahlige Zuordnung  $z(\text{KIP.1})$  (maximale Anzahl Schüler).

**Definition**

Sei  $LPR\text{-gap} = |z(\text{LPR}) - z(\text{KIP.1})|$  der maximale Abstand (obere Schranke) der optimalen, ganzzahligen Zuordnung zu der optimalen, linearen Zuordnung.

LPR-gap wird berechnet für alle generierten Zuordnungen. Folgende Annahmen wurden getroffen:

Die Bedingung  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $i = \{1 \dots n\}$ ,  $j = \{1 \dots m\}$  des Modells (KIP.1) wird durch  $0 \leq x_{ij} \leq 1$  ersetzt.

Es gelten die um den Single-Gap ( $Gap_j$ ) reduzierten Kapazitäten  $C_{J_s}$ , für  $j \in J'_s$ . Die Funktion, der in Abhängigkeit aller Kapazitätserhöhungen  $U$  entstehenden LP-gaps, ist in Abbildung 15 dargestellt.

Man sieht hier eindrucksvoll das die Zuordnung von 2007 mit 2987 Schülern und Kapazitätserhöhung von 53 mit der Modellrechnung bereits bei einer Kapazitätserhöhung von ca. 20 erreicht werden kann.

## 5.4 Konfliktanalyse von Lösungssystemen

### 5.4.1 Hintergrund/ Probleme

Für sehr große praktische Probleme ist eine Analyse der Ergebnisse wegen der Komplexität nicht trivial. Kleine ganzzahlige Probleme, wie das dieser Arbeit zugrunde liegende Problem, können mit SCIP in unter einer Sekunde gelöst werden. Dennoch haben auch diese Lösungen gewisse Nachteile. So wird durch SCIP zwar eine Lösung generiert, die Ausgabe ist aber nur sehr schwer nachvollziehbar. Warum z.B. wurden bestimmte Variablen nicht in die Lösung aufgenommen? Deswegen ist für das Rechnen von ganzzahligen Programmen eine Konfliktanalyse der Lösung für eine größere Transparenz von großer Bedeutung.

### 5.4.2 Betrachtung am Beispiel der FU-Kinder-Uni

Als nächstes wird also die Veränderung der Zuordnung, die auftritt, wenn eine Klasse nachträglich in die Zuordnung aufgenommen wird, untersucht. Hier wird die ausführliche Sensitivitätsanalyse der Zuordnung bei manuellem Fixieren von Variablen betrachtet, die nicht in der Optimalzuordnung sind.

Nach der Rechnung des KIP.1-Modells mit Basiskapazitäten  $C_J$ , wird das Ergebnis analysiert. Die Optimalzuordnung ist  $z(\text{KIP})$ . Sie liefert eine maximale Zuordnung der angemeldeten Klassen zu Terminen. Sei die Menge dieser Klassen in  $z(\text{KIP.1})$  als *1-Klassen* definiert und die Menge der restlichen Klassen, die nicht in der Zuordnung sind als *0-Klassen*.

Die Analyse erfolgt in zwei Schritten. Als erstes wird eine Einzelanalyse der *0-Klassen* vorgenommen. Ziel ist die Berechnung der Zuordnungen bei manueller Veränderung der Entscheidungsvariablen für diese Klassen. Es wird dabei die Variable für jede Klasse aus der Menge der *0-Klassen* manuell auf 1 fixiert. Durch erneute Lösung wird festgestellt, wie sich der neue Zielfunktionswert verändert hat. Diese künstliche Aufnahme einer Klasse in die Modell-Zuordnung führt zu zwei möglichen Ausgängen: eine Verminderung des Zielfunktionswertes, da die vorherige Zuordnung optimal ist, oder ein identischer Wert. Der letzte Fall bedeutet, dass beide Lösungswerte in der Zielfunktion „symmetrisch“ sind. Sei die Menge der Klassen, die keine Verminderung des Zielfunktionswertes durch Aufnahme in die Lösung verursachen, als *ô-Klassen*  $\subseteq$  *0-Klassen* definiert.

Im zweiten Schritt, der Nachoptimierung wird die Menge der  $\hat{o}$ -Klassen betrachtet. Es wird insbesondere die minimalste Abweichung des Zielfunktionswertes im Vergleich zu der optimalen Zuordnung, bei dem manuellen Fixieren der Klasse in dieser analysiert. Es wird die „Netto-Veränderung“ in der Zuordnung gemessen. Dazu zählen das Vertauschen von Klassen innerhalb der bestehenden Zuordnung und die Zuteilung von neuen Klassen aber nicht der Ausfall von Klassen, die nicht mehr in der Zuordnung sind.

Folgendes verändertes KIP.3-Modell wurde erstellt:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && \sum_{ij \in A'} (1 - x_{ij}) \\
 & \text{s. t. :} && \sum_{\forall ij \in A} x_{ij} \leq 1 && \forall i \in I \\
 & && \sum_{\forall ij \in A} w_{ij} x_{ij} \leq c_j && \forall j \in J \\
 & && \sum_{i \in I} x_{ij} \geq y_s && \forall s \in S \\
 & && \sum_{i \in I} x_{ij} \geq z_b && \forall b \in B && \text{(KIP.3)} \\
 & && \sum_{\tilde{i} \in A} x_{\tilde{i}j} = 1 && \tilde{i} \in I \\
 & && \sum_{ij \in A} w_{ij} x_{ij} = OV && \forall s \in S \\
 & && x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall ij \in A
 \end{aligned}$$

Die Menge  $A'$  enthält alle *Klassen\_id's* die in der Optimalzuordnung sind und deren Zielfunktionswert mit OV definiert ist. Mit der Zielfunktion

$$\text{minimize} \quad \sum_{ij \in A'} (1 - x_{ij})$$

wird die minimale Veränderung der Klassen aus  $A'$  in der Optimalzuordnung angestrebt. Und die Bedingung

$$\sum_{\tilde{i} \in A} x_{\tilde{i}j} = 1$$

fixiert die Entscheidungsvariable der Klasse  $\tilde{i} \in \hat{o}$ -Klassen auf 1 (d.h. Klasse  $\tilde{i}$  wird in die Zuordnung aufgenommen).

In der nächsten Abbildung sind die minimalen Veränderungen des Zielfunktionswerts aller  $\hat{o}$ -Klassen aus 2007 dargestellt:

<u>Klassen_id</u>	<u>Minimale Veränderung</u>
f1 :	obj.val= 1
f16 :	obj.val= 1
f19 :	obj.val= 3
f20 :	obj.val= 1
f22 :	obj.val= 1
f35 :	obj.val= 1
f40 :	obj.val= 1
f60 :	obj.val= 1
f73 :	obj.val= 1
f79 :	obj.val= 3
f92 :	obj.val= 1
f94 :	obj.val= 1
f105:	obj.val= 1
f143:	obj.val= 2
f144:	obj.val= 3
f155:	obj.val= 1
f181:	obj.val= 1
f217:	obj.val= 2
f234:	obj.val= 3
f242:	obj.val= 1
f247:	obj.val= 1
f249:	obj.val= 1
f264:	obj.val= 1

Abbildung 16: Veränderungen des Zielfunktionswertes bei den  $\hat{o}$ -Klassen

Wie die Ergebnisse des Modells KIP zeigen, finden nur bis zu drei „Netto-Veränderungen“ in der ursprünglichen Zuordnung statt. Das ermöglicht ein detailliertes Nachvollziehen. Als Beispiel wird die *Klassen\_id* 19 betrachtet. Hier wird die *Klasse 19* in die Zuordnung aufgenommen und die dadurch resultierenden Veränderungen dargestellt. Das Untersystem der Veränderungen ist in Abbildung 17 gegeben.

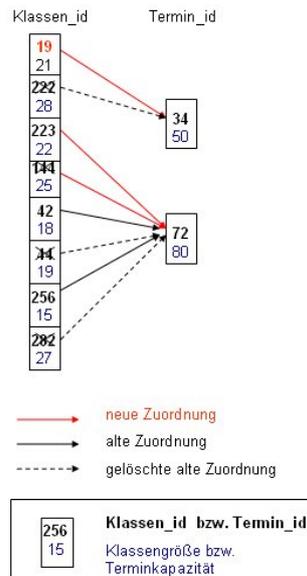


Abbildung 17: Nachoptimierung für Klasse 19

Eine andere wichtige Erkenntnis dieser Analyse ist die Möglichkeit, bei Bedarf Alternativzuordnungen zu berechnen. Eine Anmeldung ist keine feste Tatsache, es können immer Veränderungen auftreten wie beispielsweise eine Absage der Klasse oder ein nachträgliches Disqualifizieren dieser. Eine automatische Generierung von Alternativen erfolgt genau wie bei der Nachoptimierung. Allerdings wird hier die Entscheidungsvariable(n) für die entfallene(n) Klasse(n) im Modell auf Null gesetzt und die minimale Abweichung wird dann erneut berechnet. Für das obige Beispiel soll angenommen werden, dass die *Klassen\_id* 282 nicht teilnehmen wird. Daraus ergibt sich die abgebildete Alternativzuordnung in der nur eine zusätzliche Klasse gestrichen wird und dafür noch zwei anderen *Klassen\_id's* zugeteilt werden. In diesem Spezialfall bleibt sogar der Zielfunktionswert gleich.

Durch eine solche Konfliktanalyse wie in diesem Abschnitt erläutert, können die Ergebnisse transparenter dargestellt werden, was insgesamt den Zuordnungsprozess der Planung dieser Veranstaltung erheblich erleichtert, der wiederum den „Kunden“ vermittelt werden kann.

## 6 Zuteilung 2008

### 6.1 Multikriterielle Optimierung

In der bisherigen Optimierung 2007 wurden die zulässigen Zuordnungen nach nur einem Ziel bewertet (Maximale Schülerzahl). Solche Optimierungsprobleme bei denen es nur eine Zielfunktion zu minimieren bzw. zu maximieren gibt, werden als „einkriteriell“ bezeichnet. In vielen praktischen Aufgabenstellungen ist die Definition eines einzigen Ziels oft nicht gegeben, da meistens verschiedene Zielsetzungen miteinander verknüpft sind und alle möglichst gut erfüllt werden sollen, d.h., es sind oft mehrere Entscheidungen zu treffen.

Multikriterielle Optimierung untersucht also Optimierungsprobleme, bei denen mehrere Zielsetzungen angestrebt sind. In solchen Fällen gibt es meistens keine zulässigen Punkte, für die alle Zielfunktionen gleichzeitig ihr Optimum annehmen.

Die Beziehungen zwischen den Zielen können komplementär, konkurrierend oder neutral sein. Komplementäre Zielen ändern sich in der gleichen Richtung und die neutralen beeinflussen sich nicht.

Das Lösen von Zielfunktionen ist nur dann wirklich schwierig, wenn die Ziele untereinander in Konflikt stehen, also miteinander konkurrierend sind. Dieser Konflikt muss durch einen Kompromiss gelöst werden. Da keine eindeutig beste Lösung definiert ist, wird die Menge optimaler Kompromisse bestimmt, d.h. die Menge von Lösungen des Optimierungsproblems, bei der keine Verbesserung eines Zielfunktionswertes zu erreichen ist, ohne das damit eine Verschlechterung eines anderen auftritt. Diese Lösungsmenge wird nun als Pareto-Menge /Optimum<sup>5</sup> bezeichnet. Von diesen Lösungen muss der Entscheidungsträger anhand seiner Präferenzen die geeignetste auswählen.

Zum Finden von Kompromissen können verschiedene Ansätze herangezogen werden z.B.:

- Festlegung einer Ordnungsreihenfolge der Ziele nach ihrer Wichtigkeit durch den Entscheidungsträger. Bei der Optimierung wird nach dem ersten Ziel gerechnet und falls eine Differenzierung nötig ist, werden die anderen als Nebenbedingungen aufgenommen.
- Zusammenfassung von Zielen zu einem Gesamten mit verschiedener Gewichtung
- Minimieren der gewichteten Summe der Abweichungen von der ursprünglichen Zielfunktion (Goal Programming)

Die Optimierung des FU-Kinder-Uni-Problems in 2008 wurde durch die Mehrzielsetzung erfasst: Maximierung der Schüleranzahl, gleichzeitig Maximierung der beteiligten neuen Schulen. Andere Kriterien wie möglichst eine Zuordnung aller angemeldeten Schulen und Bezirke sowie Altersstufen-Konflikte wurden als Nebenbedingungen eingeführt (siehe Abschnitt 3.4). Die beiden Hauptziele können nicht gleichzeitig realisiert werden. Sie stehen im folgenden Konflikt: Zuordnung von mehr Schülern bedeutet Zuordnung von

---

<sup>5</sup>benannt nach dem Ökonom und Soziologen Vilfredo Pareto (1848-1923)

weniger neuen Schulen und umgekehrt. Man ist auf einen Kompromiss angewiesen. Die festgelegten Bedingungen wurden von dem Koordinator und Entscheider vor der Optimierung nach Präferenzen definiert. Aber auch während des Zuordnungsprozesses wurden Änderungen vorgenommen bzw. ergänzt. D.h. die Ziele wurden nach Priorität geordnet, und der Koordinator aktiv in den Prozess mit einbezogen. Das Optimierungskonzept sah folgendermaßen aus:

- Lösung des Modells KIP mit jeweils einem der beiden wichtigsten Ziele => Ergebnis ist jeweils eine Optimalzuordnung. Weiterhin werden nun die beiden Ziele zu einer gesamten mit verschiedener Gewichtung zusammengefasst und mehrere „Kompromiss“-Zuordnungen gerechnet
- Mathematische Betrachtung von aller berechneten Alternativen
- Sensitivitätsanalysen wie Einzelterminanalyse, um Möglichkeiten zur Verbesserungen zu testen und auszuschöpfen
- Rechnung/Erzeugung von weiteren Zuordnungen
- Aufarbeitung und Bereitstellung von Informationen für den Koordinator der Veranstaltung
- Entscheidung: Auswahl einer der Alternativen

Im nächsten Abschnitt folgen die genauen Rechenergebnisse der FU-Kinder-Uni-Optimierung 2008. Die verschiedene Zuordnungsalternativen sind in Abbildung 19 dargestellt.

## 6.2 Ergebnisse 2008

2008 wurde die Offline-Planung mit dem KIP-Modell unter realen Bedingungen und Daten getestet. Zu diesem Zweck wurde ein Link als Schnittstelle zur Verfügung gestellt, um die benötigten Informationen in dem Datenformat für das Modell zu erhalten. Nach der Rechnung des Modells wurden die mathematischen Zuordnungsvorschläge dann über den selben Link in die Datenbank integriert.

Vorab kurz einige Angaben zur Statistik: Der Anmeldezeitraum betrug drei Tage. Nach Erfassung der Daten gab es eine nahezu identische Menge von Anmeldungen bei gleichzeitig reduziertem Angebot. In 2007 waren es 695 Anmeldungen aus 131 Schulen für das Angebot von 22 Kursen an 76 Terminen. 2008 stand einer Anzahl von 668 Anmeldungen aus 134 Schulen ein Angebot von 17 Kursen an 58 Terminen gegenüber, d.h. 20 Termine weniger. Dadurch ergab sich eine erhöhte Nachfrage und damit mehr Variationsmöglichkeiten der Zuteilung.

Im Gegensatz zu 2007, wo das Kursangebot eine maximale Schülerzahl erreichen sollte, stand 2008 das Ziel im Vordergrund, möglichst viele und vor allem bisher nicht teilgenommene Schulen zu berücksichtigen.

Zusätzlich zu den festgelegten Bedingungen im KIP-Modell wurden noch andere definiert und im Modell berücksichtigt. Hier eine Zusammenfassung aller Randbedingungen für das Zuteilungsverfahren-2008:

- ein Zähler für neue Schulen; Generell soll die Teilnahme von Schulen angestrebt werden, die im Vorjahr nicht teilnahmen
- Kurs „PhysLab- Schwimmen, Schweben, Sinken“ : Zuordnung von nur einer Schulklasse und einer bestimmten Auslastung
- Gewährleistung einer möglichst gleichen Altersstufe der teilnehmenden Klassen pro Termin (Konflikt-Bedingung)
- allgemein eine Zuordnung von verschiedenen Schulen statt verschiedener Klassen aus einer Schule, der angestrebte Idealfall wäre höchstens eine Teilnahme pro Schule, damit andere auch Chancen haben teilzunehmen

Verschiedene Zuordnungsvarianten:

Bei der Optimierung des FU-Kinder-Uni-Problems gibt es verschiedene Zielsetzungen, so dass nicht eine eindeutige, als die optimalste von diesen, identifiziert werden kann. Es ist ein Entscheidungsprozess, der unter bestimmten Bedingungen zu treffen ist. Ein Überblick über verschiedene Zuordnungen ist entscheidend. Ohne Kapazitätserhöhung erfolgte eine Zuordnung von maximal 1786 Schülern. Die Anzahl neuer Schulen in der Optimalzuordnung unter dem Ziel maximale Schüleranzahl, definiert die minimale Anzahl von zuteilbaren neuen Schulen. Interessant ist die Bestimmung der maximal möglichen Anzahl neuer Schulen. Zu diesem Zweck wurde das KIP-Modell mit  $\alpha = \gamma = 0, \beta = 1$  („KIP-s2007“-Modell) gerechnet. Das liefert als Resultat maximal 69 neue Schulen.

Dazu wurde als erstes eine Analyse zur Untersuchung der Anmeldedaten und vorhandenen Kapazitäten durchgeführt. Die Single-Knapsack-Schranke (SKS) wurde für das Kinder-Uni-Problem durch das Lösen von Single-Knapsack-Problemen für jeden Termin ermittelt. D.h. es wurde unabhängig für jeden Termin eine Optimierung durchgeführt, so dass dieser maximal ausgelastet wird. Die Differenz zwischen vorhandener Kapazität und die Summe der Schüler aller zugeteilten Klassen definiert den GAP pro Termin, der „leer“ bleibt. Die Summe aller dadurch resultierenden Gesamt-GAP betrug 170 von 2072 zur Verfügung stehenden Plätzen. Dies sind die nicht zuteilbaren Gesamtplätzen. Es ergab sich eine Single-Knapsack-Schranke von 1912 Plätzen. Mit der optimalen Zuordnung wurden 1786 Plätze davon belegt.

Als nächstes wurde eine gezielte Analyse der Einzeltermine angewandt, um mögliche Termine zu identifizieren, wo eine eventuelle Kapazitätserhöhung sinnvoll ist. Anhand des Ergebnisses wurden entsprechend mehrere Zuordnungsalternativen gerechnet, wonach einer Kapazitätserhöhung bei drei Terminen um jeweils einen Platz zugestimmt wurde. Die dadurch errechnete Optimalzuordnung betrug 1796 Schüler. Mit der Gesamtkapazitätserhöhung von nur drei Plätzen wurden also insgesamt sogar 10 weitere Schüler zugeteilt. Eine erneute Berechnung der GAP's der Termine ergab eine Reduzierung auf 163 Plätzen, was dem „Extra-Gewinn“ der Schüler nach der Kapazitätserhöhung entspricht. Die Ergebnisse werden in Abbildung 18 gezeigt.

Gesamtkapazität	2075
GAP (nicht zuteilbare Plätze)	163
Single-Knapsack-Schranke	1912
<b>Zuordnung (maximale Anzahl neuer Schulen):</b>	<b>1796</b>
Zuordnung (maximale Anzahl Schüler):	1879
<b>Auslastung</b>	<b>94%</b>
Auslastung	98%

Abbildung 18: Statistik der Zuordnung 2008

Die Gesamtpazität von 2075 Plätzen resultiert aus der ursprünglichen Kapazität von 2072 Plätzen und der zugestimmten Kapazitätserhöhung von drei Plätzen. Mit der Optimalzuordnung wurden ein 94%-Ausnutzungsgrad der zur Verfügung stehenden nutzbaren Kapazität von 1912 Plätzen erzielt. Zusätzlich wurde der Zielfunktionswert für die maximale Anzahl Schüler berechnet. Er betrug 1879 Schüler, was eine Belegung von 98 % der nutzbaren Plätzen bedeutet hätte.

Einen Überblick der Ergebnisse aller Alternativzuordnungen nach bestimmter fester Bedingung „maximale Anzahl neuer Schulen“ zeigt die Abbildung 19. Es wurden alle Zuordnungen zwischen der Zahl minimaler Anzahl neuer Schulen (43) und maximal möglicher Anzahl neuer Schulen (69), generiert.

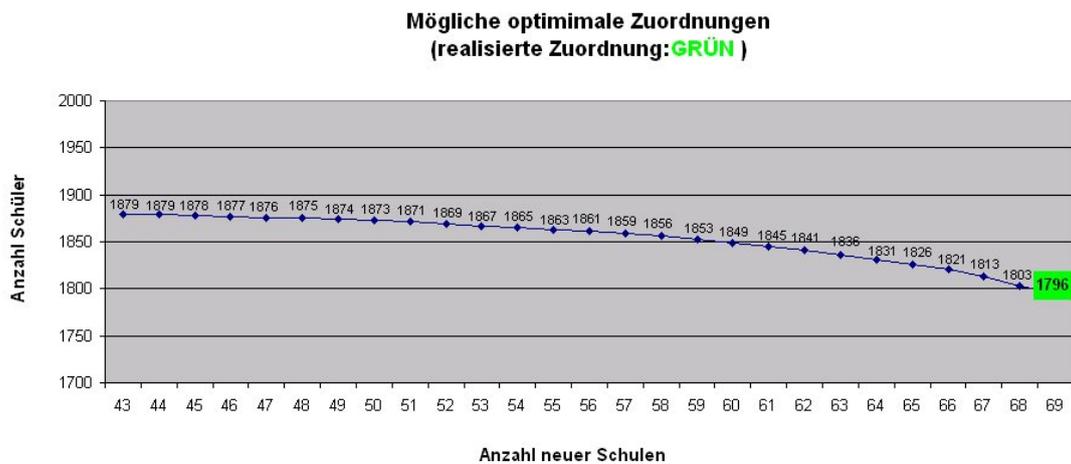


Abbildung 19: Zuordnungsvarianten 2008

Die als optimal ausgewählte Zuordnung lieferte 78 Klassen aus 75 Schulen eine Teilnahmezusage (d.h. 55,9 % aller angemeldeten Schulen und 30% aller angemeldeten Klassen). Darunter sind erstmals 69 Grundschulen oder grundständige Gymnasien, die im Vorjahr nicht teilnahmen. Insgesamt konnten 1796 Schülerinnen und Schüler, die die Kinder-Uni der Freien Universität in Berlin besuchen.

Eine Statistik der Bezirksbeteiligung gibt die Abbildung 20 an:

Alle Bezirke	Optimalzuordnung 2008	in %	Anmeldungen 2008	in %	Gesamtanmeldungen der beteiligten Schulen 2007:
Potsdam-Mittelmark	4	5%	34	5%	12
Steglitz-Zehlendorf	12	15%	149	22%	96
Pankow	6	8%	48	7%	23
Neukölln	8	10%	67	10%	14
Mitte	6	8%	32	5%	6
Reinickendorf	4	5%	37	6%	16
Friedrichshain-Kreuzberg	6	8%	30	4%	10
Lichtenberg	4	5%	16	2%	0
Charlottenburg-Wilmersdorf	7	9%	75	11%	30
Tempelhof-Schöneberg	10	13%	86	13%	36
Spandau	7	9%	60	9%	31
Marzahn-Hellersdorf	2	3%	23	3%	6
Treptow-Köpenick	2	3%	11	2%	4
	$\Sigma = 78$ Klassen  (von den <b>256 Klassen</b> die sich <b>2008</b> angemeldet haben, konnten <b>78 Klassen</b> zugeteilt werden, was einer <b>Beteiligung von 30%</b> entspricht)		$\Sigma = 668$ Anm.  (diese 668 Anm. verteilen sich auf <b>256 Klassen</b> , die sich <b>2008</b> insgesamt angemeldet haben)		$\Sigma = 284$ Schulen  (davon haben <b>43% schon 2007</b> an der Veranstaltung teilgenommen!)

Abbildung 20: Bezirksbeteiligung 2008

In Spalte eins sind alle angemeldeten Bezirke aufgelistet. Die zweite und dritte Spalte enthalten jeweils die Anzahl der Klassen aus einem Bezirk in der Optimalzuordnung bzw. die Gesamtanzahl und der entsprechende prozentuale Anteil. Zu beobachten ist, dass die

prozentuale Verteilung der Bezirke an der Zuteilung, dem prozentualen Anteil der Bezirke in der Gesamtsumme der Anmeldungen ungefähr entspricht. Die letzte Spalte enthält zur Statistik die Anzahl Anmeldungen aus „alten“ Schulen pro Bezirk. Also 43% aller Anmeldungen waren aus Schulen, die bereits im Jahr 2007 an der FU-Kinder-Uni teilgenommen haben.

Beim Zuteilungsprozesses 2008 wurden außerdem Altersstufen Konflikte ausgeschlossen. Dies erfolgte mit der Bedingung (6) des Modells KIP (siehe Kapitel 3.4). Anhand der Anmeldedaten wurden die Paare von Klassen identifiziert, die nicht gleichzeitig zugeteilt werden dürfen (Menge E). Zu der Rechnung des Modells KIP unter den realen Bedingungen erfolgte eine gezielte manuelle „Bereinigung“ der Konflikte, da kurzfristig der Wunsch an die Optimierung gestellt wurde. Eine automatische Berücksichtigung durch eine Konfliktdatei nach definierten Regeln wird für die nächste Kinde-Uni möglich sein. Es können dadurch Konflikte ausgeschlossen, aber auch bis zu einer Toleranz erlaubt werden, um so ein flexiblen Planungsprozess zu gewährleisten.

Als Letztes wurde manuell für jede der Klassen, die nicht in der Optimalzuordnung war, eine Aufnahme in diese angesetzt und die beiden Zielfunktionswerte miteinander verglichen. Wenn sie identisch waren, wurde eine Nachoptimierung zur Bestimmung der Untersysteme der Veränderungen zur Optimalzuordnung vorgenommen. Es wurden letztendlich 10 identische Zuordnungen, d.h. mit gleicher Teilnehmerzahl und gleicher Anzahl neuer Schulen (69) identifiziert. Eine Analyse wird im nächsten Abschnitt 6.3. durchgeführt.

### 6.3 Konfliktanalyse der Zuordnung

Nach der Berechnung von „symmetrischen“ Zuordnungen wurde eine Nachoptimierung der neun  $\hat{o}$ -Klassen durchgeführt, um auf dieser Weise die minimale Abweichung (Veränderung) in der neu berechneten Zuordnung zur Optimalzuordnung zu bestimmen. Zusätzlich zu der Optimalzuordnung gab es also mit diesen Klassen neun „symmetrische“ Zuordnungen. Es gilt, dass drei davon identisch sind, da sie die gleichen drei nicht zugeordneten Klassen enthalten ( $Klassen\_id$ : 17, 94, 245). Eine Aufnahme einer der jeweiligen Klassen bedeutet, dass die anderen zwei mit aufgenommen werden. Also gab es bei dem Zuteilungsprozesses im Jahr 2008 insgesamt acht „symmetrische“ beste Zuordnungen. Eine davon wurde als Optimalzuordnung vom Koordinator ausgewählt. Die Untersysteme der Veränderungen für die Nachoptimierung der einzelnen Klassen ist in der Abbildung 22 dargestellt. Die rot-markierte  $Klassen\_id$  ist die entsprechende Klasse, für die die minimale Abweichung der Zuordnung zur Optimalzuordnung bestimmt wurde.

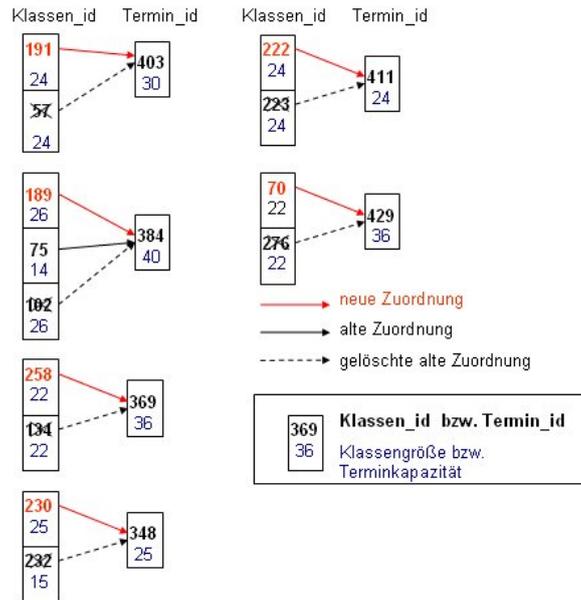


Abbildung 21: Untersysteme mit einem „Eins-zu-Eins-Austausch“

Für diese sechs Klassen lieferte die Nachoptimierung, dass nur ein „Eins-zu-Eins-Austausch“ in der Zuordnung stattfindet, d.h. die minimale Abweichung zur Optimalzuordnung beträgt eins. Die Klasse 191 wird wie in Abbildung 21 dargestellt, in der Zuordnung dem Termin 403 zugeteilt. Dadurch wird die Klasse 57 aus der Zuordnung ausgeschieden. D.h. in der Optimalzuordnung wurde die Klasse 57 statt der Klasse 191 ausgewählt. Alle anderen Zuteilungen bleiben unverändert. Das gleiche gilt für die restlichen Klassen in der Abbildung 22. Da der Zielfunktionswert gleich ist, folgt also, dass diese Klassen jeweils gegen eine andere Klasse in der Optimalzuordnung „verlieren“.

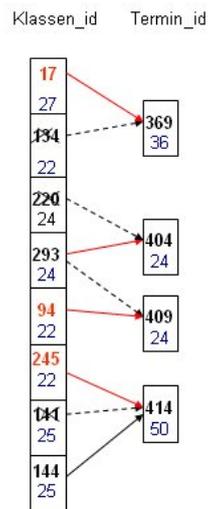


Abbildung 22: Untersystem für Klassen 17, 94 und 245

Hier werden die drei Klassen, für die die Nachoptimierung veränderte identische Untersysteme der Zuordnung lieferte, dargestellt.

Die Aufnahme einer der rot-markierten Klassen führt zu einem „Eins-zu-Eins-Austausch“ der Klasse 17 bzw. 245 mit der Klasse 134 bzw. 141. Klasse 94 wird dem Termin 409 zugeteilt, wodurch die Klasse 293 dem Termin 404 zugewiesen wird, was das Ausscheiden der Klasse 220 zur Folge hat.

## 6.4 Fazit 2008

Hier werden die Ergebnisse des Zuordnungsprozesses 2008 nochmal kurz zusammengefasst.

Insgesamt hat der Prozess der Koordination und des Datenaustausches zur optimierten Planung der FU-Kinder-Uni sehr gut funktioniert. Es erfolgte eine „Offline-Planung“ mit dem KIP-Modell. Durch den vom Programmierer zur Verfügung gestellten Link wurden die Eingabedaten, in der für das Modell definierten Form, geliefert. Erstmals wurde bei der Planung 2008 eine, unter Berücksichtigung verschiedener Ziele, multikriterielle Optimierung der FU-Kinder-Uni realisiert und eine unabhängige Zuteilung mit beweisbar optimalen Lösungen erzielt. Bei der diesjährigen Kinder-Uni erfolgte die Zuteilung mit dem Ziel einer maximal möglichen Beteiligung neuer Schulen.

Nochmal zum Vergleich: Mit dem Ziel einer maximal möglichen Anzahl von Schülern ergab sich mit der verbesserten Zuordnung des KIP-Modells eine mögliche Anzahl von 1879 Schülern berechnet, also ganze 92 Schüler mehr als mit dem bisherigen manuellen Zuteilungsverfahren. Mit dem Ziel maximale Anzahl neuer Schulen wurden eine Anzahl von 69 Schulen berücksichtigt, wogegen es mit dem bisherigen Zuteilungsverfahren nur 41 Schulen waren. Das war auch die Zuordnung, die von dem Koordinator für 2008 angenommen wurde. Ganze 28 Schulen mehr konnten also mit Hilfe des KIP-Modells der diesjährigen Kinder-Uni beiwohnen. Ein toller Erfolg für die Veranstalter.

Zusätzlich wurden verschiedene Zuordnungsvorschläge und eine Auslastungsanalyse der vorhandenen Plätze generiert und eine bessere Entscheidungsbasis gewährleistet. Die Einzelterminanalyse ermöglichte im Voraus, die Information auszugeben, bei welchen Terminen eine Kapazitätserhöhung das Ergebnis positiv beeinflusst. Insgesamt gewährleisteten die durchgeführten Analysen einen besseren Überblick über die Anmelde-Daten und die Kapazitätzusammenhänge bei den einzelnen Terminen zu sinnvollen Kapazitätserhöhungen, was eine flexible Planung ermöglichte. Durch die Ergebnisse wurde daraufhin einer Kapazitätserhöhung von drei Plätzen zugestimmt, die eine Erhöhung der Zuordnung um ganze 10 Schüler mehr mit sich brachte. Mit den Basiskapazitäten hätten 1786 Schüler zugeteilt werden können und nach der Kapazitätserhöhung 1796. Dies ist auch die realisierte Zuordnung bei der FU-Kinder-Uni 2008. Die verfügbaren Kapazitäten konnten mit dem KIP-Modell zu 94 % ausgelastet werden.

Die diesjährige optimierte Kinder-Uni-Planung wurde außerdem in der Presse angekündigt. Im Tagesspiegel erschien dazu eine Beilage „KinderUni lädt zu Kursen und Vorlesungen“ (Ausgabe vom 30.08.2008) [11]:

„Sie sind sieben bis dreizehn Jahre alt. Doch vom 29. September bis zum 2. Oktober 2008 sind sie Studenten an der KinderUni der Freien Universität Berlin. .... Insgesamt kann der akademische Nachwuchs 58 Kurse und Vorlesungen bei 17 Professoren und Dozenten besuchen. Das sind 101 Stunden Bildung, die Spaß machen.....Wir haben jedes Jahr mehr Anmeldungen als freie Plätze. .... Mathematiker des Konrad-Zuse-Zentrums für Informati-

onstechnik Berlin haben nun in Zusammenarbeit mit der Freien Universität ein Optimierungsprogramm entwickelt, das die Auslastung der einzelnen Mitmach-Kurse und Vorlesungen weiter verbessern soll. „Es würde mich sehr freuen“, sagt Weiß, „wenn wir unsere Kurse optimal belegen könnten.“

und auch auf der Web-Seite der FU-Kinder-Uni erschien dieser Artikel, sogar etwas ausführlicher mit der folgenden Erklärung [12]:

„Das Optimierungssystem basiert auf den Erfahrungen der vergangenen Jahre. „Es fasst Angebot und Anmeldungen der KinderUni in ein mathematisches Modell, das in der Fachsprache „Multiple-Knapsack-Problem“ heißt. Ins Deutsche übersetzt ist es das „Problem des Packens mehrerer Rucksäcke“. In unserem Fall sind die Mitmachkurse und Vorlesungen die Rucksäcke und die Schulklassen sind die einzupackenden Gegenstände. Eine beweisbar optimale Kurseinteilung für die KinderUni geht in Sekundenschnelle. Und diese Rechnung ist dabei natürlich absolut objektiv. Man kann jetzt aber noch viel mehr machen. Man kann denjenigen, die eine Absage erhalten, mit einer „was-wäre-wenn“-Rechnung eine Begründung geben. Oder man kann überlegen, ob man es wichtiger findet, mehr Schulen oder mehr Stadtbezirke abzudecken“, erklären die Entwickler Dr. Ralf Borndörfer und Biliana Boeva. „

## 7 Online Planung-Konzept

In diesem Kapitel wird ein Konzept der Online-Planung vorgestellt, mit dem im Rahmen der optimierten Planung der FU-Kinder-Uni-Veranstaltung der ganze Anmeldeprozess in Echtzeit abgewickelt werden kann. Durch die Einbettung des Optimierungsmodells in den Anmeldeprozess sollen Informationen während der Anmeldung, zur Steuerung dieser, ausgegeben werden. Der Anmeldeprozess soll durch den Informationsaustausch interaktiv ablaufen. Das Ziel ist es, eine bessere Auslastung der Kurse und eine höhere Teilnehmerzahl zu erreichen.

Über dieses Tool soll auch gleichzeitig eine günstige Startbasis durch Datengewinnung für die Optimierung mit dem dargestellten KIP-Modell geschaffen werden. Als nächstes folgt eine Erläuterung der Konzeptidee.

### 7.1 Konzept

#### Neue Überlegungen zum Konzept

- **Funktionalität**  
Es stellt sich die Frage welche Informationen sinnvoll sind und auf welcher Weise sie vermittelt werden sollen, damit möglichst im voraus Tendenzen zu erkennen sind, und die Nutzer darauf hingewiesen werden.
- **Software-Aspekte**  
Es sollen die Organisation und die Planung der Online-Anmeldung der Kinder-Uni untersucht werden, ob eine bessere Grundlage für das Modell durch eine überarbeitete Datenerfassung bzgl. der Korrektheit der Daten möglich ist.

Die Basis für die Anmeldung soll zwar weiterhin der Programmplan im Internet sein aber nicht mehr mit dem gleichen Ablauf, bei dem die Auswahl eines der abgebildeten Termine und die nachfolgende Eintragung der Restdaten der anzumeldenden Klasse erfolgte. Eine Nicht-Einhaltung des Eignungsgrads (altersgerecht) zur Anmeldung wurde nicht ausgeschlossen. Der Eignungsgrad muss jetzt bei der Anmeldung der Termine für die verschiedenen Jahrgangsstufen eingehalten werden. Sinnvoll wäre dafür in einem Anmeldeformular alle Angaben einzutragen, so dass nach den Basiseingaben wie Klassenstufe und Klassengröße nur eine Liste der Termine mit passenden Vorschlägen für die Klassengrößen zugelassen wird, aus der dann die Auswahl stattfindet. Es wird damit gewährleistet, dass sich keine Klasse für einen Termin anmeldet, bei der von vornherein feststeht, dass die Kapazität des zugehörigen Kurses nicht ausreicht. Sei die Liste aller Termine, die für die sich anmeldende Klasse altersgerecht sind, als  $L$  definiert ( $L \subseteq J$ ). Der Liste  $L$  entsprechend kann noch ein angepasster Stundenplan zur Übersicht mit ausgegeben werden.

Nachdem die Klassengröße durch den Anwender eingegeben wurde, können für die Liste  $L'$ , die alle Termine enthält, die dann theoretisch größenmäßig für die Klasse passen

würden, folgende Fälle auftreten:

- $L'$  enthält keinen passenden Termin zu der angegebenen Klassengröße
- $L'$  enthält mindestens einen passenden Termin zu der angegebenen Klassengröße

Es gibt für den ersten Fall einerseits die Möglichkeit der Aufforderung zu einer neuen Klassengrößen-Angabe oder andererseits zur internen Berechnung von Klassengrößen-Vorschlägen, die auch für andere Termine passen. Beide Fälle werden im nächsten Abschnitt betrachtet.

### 7.1.1 Funktionalität/Informationsausgabe

Eine Möglichkeit die Anmeldezeiten zu beeinflussen und so eine Basis für ein besseres Optimierungsergebnis zu schaffen, ist während des Anmeldeprozesses bestimmte Funktionalitäten (Informationsausgaben) im Layout zu implementieren, um so eine höhere Teilnehmerzahl durch Überwachung und Steuerung der Anmeldungen und eine entsprechende Reaktion auf Tendenzen zu ermöglichen. So können die Klassen einen Anmelde-Status oder hilfreiche Informationen zur Anpassung ihrer Anmeldungen bekommen. Beispielsweise kann eine Klasse für den angemeldeten Termin die bisherige prozentuale Auslastung erfahren, um bei eventueller Überbuchung die Möglichkeit zu bekommen, einen anderen Termin auszuwählen. Durch die Information über die Auslastung der Termine zum Zeitpunkt der Anmeldung, werden die Anmeldungen besser verteilt. Als Beispiel gab es in 2008 einen Termin mit einer 26-fachen Überbuchung, d.h., 40 **Klassen** mit durchschnittlich 26 Schülern bewarben sich auf 40 **Plätze**. Um noch konkret zu steuern, werden die zum Zeitpunkt der Anmeldung noch nicht stark ausgelasteten Termine zur Auswahl besonders angeboten, um eine Belegung aller Termine zu unterstützen und zu gewährleisten. Dabei bleibt eine freie Auswahl auch auf schon stark ausgelastete Termine aber jederzeit gegeben. Jeder kann sich über den gesamten Anmeldezeitraum für jeden altersgemäß und kapazitätsmäßig passenden Termin anmelden.

Zum Vergleich gab es in 2008 einen Gesamt-GAP (vgl. Kapitel 6.2) von 163 Plätzen. Diese sind die Motivation für Überlegungen, wie man Termine besser auslasten kann.

Ausgehend von der Grund-Information der Auslastung der angemeldeten Termine stellt sich die Frage, ob man sie weiter spezifizieren kann, dass also noch konkretere Hinweise bekannt gegeben werden. Dass ein Termin über eine bestimmte Prozentzahl an freien Plätzen verfügt, ist allein nicht sehr transparent und verständlich. Sinnvoll ist es zum Zeitpunkt der Anmeldung, den Hinweis zu geben, welche Größe und welcher Termin für eine mögliche Zuteilung der Klasse günstig ist.

Die erste Idee, auf der Single-Knapsack-GAP-Rechnung (Kapitel 5.3.3) basierende Informationen auszugeben, soll als nächstes näher erläutert werden. Dabei wird unabhängig für jede Klasse und jeden Termin eine separate Rechnung des GAPs durchgeführt und dies soll mit möglichst geringem Rechenaufwand erfolgen. Es wird eine gleichmäßige Verteilung der Anmeldungen auf die Termine mit besser bzgl. der Klassengröße kombinierbaren

Anmeldungen erreicht. Dem Anmelder soll also vermittelt werden, mit welcher Anzahl von Schülern die Klasse bessere Chancen für eine Zuteilung zu den Terminen hätte. Diese Rechnung wird ohne die anmeldende Klasse und mit ihr für den ausgesuchten Termin bzw. für andere passende Alternativtermine ausgerechnet und beide Werte miteinander verglichen.

Betrachtet werden alle Möglichkeiten, die bei einer Anmeldung für eine Klasse auftreten können. Die graphische Darstellung ist in der nächsten Abbildung 23 gegeben:

### Ablaufschema einer Anmeldung (Klassengröße $K$ und Stufe bekannt)

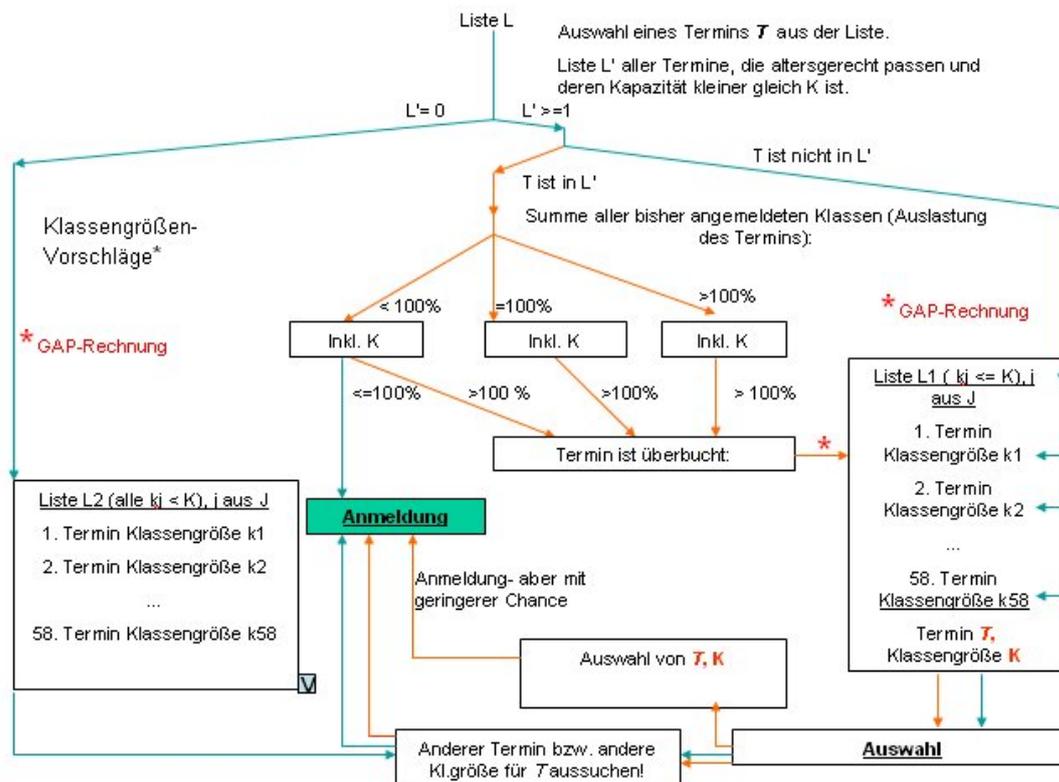


Abbildung 23: „GAP-Anmeldeprozess“

Ausgehend von der Angabe einer Klassengröße  $K$  und der Altersstufe wird die Liste  $L$  bzw. der der Liste  $L$  entsprechende Stundenplan angezeigt. Daraus wird ein Termin ausgewählt. Als nächstes wird überprüft, ob die Liste  $L'$  keinen oder mindestens einen Termin enthält ( $L'$ : Liste der Termine, die die Klassengröße  $K$  prinzipiell aufnehmen können). Im zweiten Fall wird noch unterschieden, ob der ausgewählte Termin  $T$  in  $L'$  enthalten ist oder nicht.

Betrachte den Fall  $L' \geq 1$  und der Termin  $T$  ist darin enthalten.

Es können folgende Fälle für die Auslastung von  $T$  (sei die Auslastung  $A_T$ ) bei einer Anmeldung auftreten:

1.  $T$  ist bereits überbucht, d.h.  $A_T \geq 100\%$
2. Es sind noch ausreichend Plätze frei, d.h.  $A_T < 100\%$

Betrachte den Fall 2. Falls nach Berücksichtigung der neuen Klassengröße  $K$  immer noch  $A_T < 100\%$  gilt, wird die Anmeldung ohne weiteres aufgenommen. Dieser Fall findet relativ selten in der Praxis statt. Schon wenige Anmeldungen schöpfen einen Termin aus. Wenn es zwar freie Plätze gibt, aber diese nicht ausreichend für  $K$  sind, gilt der erste Fall:  $T$  ist überbucht.

Hier soll für jeden passenden Termin der GAP der bisher angemeldeten Klassen mit dem GAP, wenn die neue Klasse zugeteilt wird, verglichen werden. Es wird ein automatisches Angebot von Terminen in einer Liste  $L1$  realisiert, bei der absteigend abzulesen ist, bei welcher Klassengröße ein kleinerer GAP bei den Terminen zustande kommt, wodurch sich für den Anmelder mit dieser Klassengröße eine höhere Aufnahmewahrscheinlichkeit ergibt. Dazu werden auch kleinere Klassengrößen als  $K$  betrachtet. Ein Angebot zur Anmeldung mit Anzahl von zum Beispiel 3, 4 Schülern ist aber nicht sinnvoll. Basierend auf den Daten aus 2008 (kleinste Klassengröße 5) kann zum Beispiel fünf als die minimal mögliche Klassengröße definiert werden. Somit wird der GAP für alle Termine aus  $L$  für mögliche Klassengrößen zwischen 5 und der originalen Klassengröße berechnet.

Es werden also pro Termin mehrere 3-Tupels (SGAP,  $T$ , *Klassengröße*= $x$ ) gerechnet, wobei  $5 \leq x \leq K$ . Daraus wird der beste ausgewählt. Das erste Kriterium ist der minimale GAP, welcher gut für die Optimierung bzgl. der Auslastung der Kapazitäten ist. Das zweite Kriterium wählt die maximale Klassengröße aus, was für die Klasse einen kleinen „Verlust“ von Schülern (Aufteilen der Klasse) zur Folge haben kann. Die Liste  $L$  wird zur Liste  $L1$  mit der besten Klassengröße zu jedem Termin aktualisiert. Sie enthält, wie erwähnt, die Termine absteigend sortiert. Es kann in  $L1$  vorkommen, dass es einen anderen Termin gibt, der nicht ausgebucht ist, in dem die Klasse mit der vollen Größe  $K$  zugeteilt werden kann. Auch der ursprünglich ausgewählte Termin  $T$  wird in der Rangliste enthalten sein, einmal mit einer reduzierten Klassengröße und einmal mit der angemeldeten Größe  $K$ . Man könnte ihn zum Beispiel farblich hervorheben. Also werden nicht stark ausgebuchte Termine ganz oben in der Liste  $L1$  zur Auswahl stehen. Es war von vornherein das Ziel den Nutzer auf diese Termine aufmerksam zu machen. Am Ende der Liste  $L1$  steht der Termin  $T$  mit der bisherigen Klassengröße  $K$ , da die Klassengrößen aller anderen Termine passend geändert sind (der GAP ist kleiner als bei  $T$  mit Größe  $K$ ), was bei einer Auswahl aber zu einer Anmeldung mit wenig Chancen auf Zuteilung führt (orangener Pfeil- $L1$ ). Aus  $L1$  wird dann ein neuer Termin bzw. ein Alternativtermin mit der angebotenen Klassengröße ausgewählt. Zusätzlich kann der der Liste  $L1$  entsprechende Stundenplan zur besseren Übersicht mit angezeigt werden. Nach der Auswahl wird die Anmeldung vermerkt.

Dann gibt es noch den Fall, dass  $T$  nicht in  $L'$  enthalten ist. D.h. es gibt Termine, die  $K$  kapazitätsmäßig aufnehmen können, aber der ausgewählte Termin gehört nicht dazu. Hier gilt analog die gleiche Liste  $L1$  mit der Ausnahme, dass  $T$  mit der Klassengröße  $K$  komplett in der Auswahl fehlt. Es können wieder Alternativtermine enthalten sein, bei denen eine volle Zuteilung von  $K$  möglich ist oder andere, denen die Klasse nur mit

kleinerer Klassengröße als  $K$  zugeteilt werden kann (blaue Pfeile- $L1$ ).

Betrachte den letzten Fall:  $L' = 0$ . Dies bedeutet, dass es für die angegebene Klassengröße gar keinen kapazitätsmäßig passenden Termin gibt. Hier wird die gleiche Rechnung wie oben durchgeführt, mit dem Unterschied, dass die Klassengröße nach oben durch die Kapazität des entsprechenden Termins  $j$  begrenzt wird, d.h.  $5 \leq x \leq c_j$  gilt. Es wird analog für jeden Termin ( $j \in L$ ) die beste alternative Klassengröße angezeigt, die den besten GAP liefert und möglichst nah an  $K$  liegt. Hier werden alle Termine in einer aktualisierten Liste  $L2$  angezeigt, wobei als Vorschlag nur geänderte Klassengrößen zu den Terminen vorliegen werden. Nach Tätigkeit einer Auswahl wird die Anmeldung vermerkt.

Somit sind alle Fälle, die die Anmeldesituation widerspiegeln, abgedeckt. Analog wird dieser Prozess für jede sich anmeldende Klasse durchlaufen und zum Schluß wird das KIP-Modell mit allen Daten durchgerechnet. Die auf dem GAP basierenden Informationen liefern zwar schnell eine Basis zur Informationsausgabe während der Anmeldung, aber diese ist leider nicht sehr repräsentativ, da sie auf von einander unabhängigen Rechnungen für die Termine beruht. Es werden bei der GAP-Rechnung nicht alle Bedingungen des Endmodells, wie beispielsweise die Bedingung, möglichst viele neue Schulen teilnehmen zu lassen, berücksichtigt. Diese lokale beste Auslastung für die einzelnen Termine wird zum Schluss bei der Betrachtung im KIP-Modell, wo noch viele neue Bedingungen gelten, global nicht erreicht. Das ist die Motivation zur Überlegung, ob auf Kosten der Rechenleistung repräsentativere und für das Gesamtergebnis effizientere Angaben während der Anmeldung vermittelt werden können.

Die Grundlage dafür bildet die nächste Idee („KIP-Anmeldung“), bei der eine Rechnung des KIP-Modells für jede Klasse, die sich anmeldet erfolgt. Somit werden von vornherein alle, für die FU-Kinder-Uni geltenden Bedingungen, berücksichtigt. Entsprechend wird die Information der Wahrscheinlichkeit für eine Zuteilung für den ausgesuchten Termin und für alle anderen Termine, die zum Zeitpunkt der Anmeldung nicht ausgelastet sind, ausgegeben.

Angenommen wird wie oben, dass die Klassengröße  $K$  und Stufe bereits bekannt sind. Es treten zwar die gleichen unterschiedlichen Fälle für eine Klasse während der Anmeldung auf, aber die Grundrechnung zu den Listen der Vorschläge  $L1.1$  und  $L1.2$  ist anders.  $L1.1$  enthält den Termin  $T$  nur mit einer reduzierten Klassengröße  $K$ , dafür eventuell andere Termine mit  $K$ . Die Liste  $L1.2$  dagegen enthält den Termin  $T$  auch mit der Größe  $K$  und in der Liste  $L2$  taucht kein Termin mit Klassengröße  $K$  auf. Eine differenzierte Darstellung der Listen ist in der nächsten Abbildung gegeben.

### Ablaufschema einer Anmeldung (Klassengröße $K$ und Stufe bekannt)

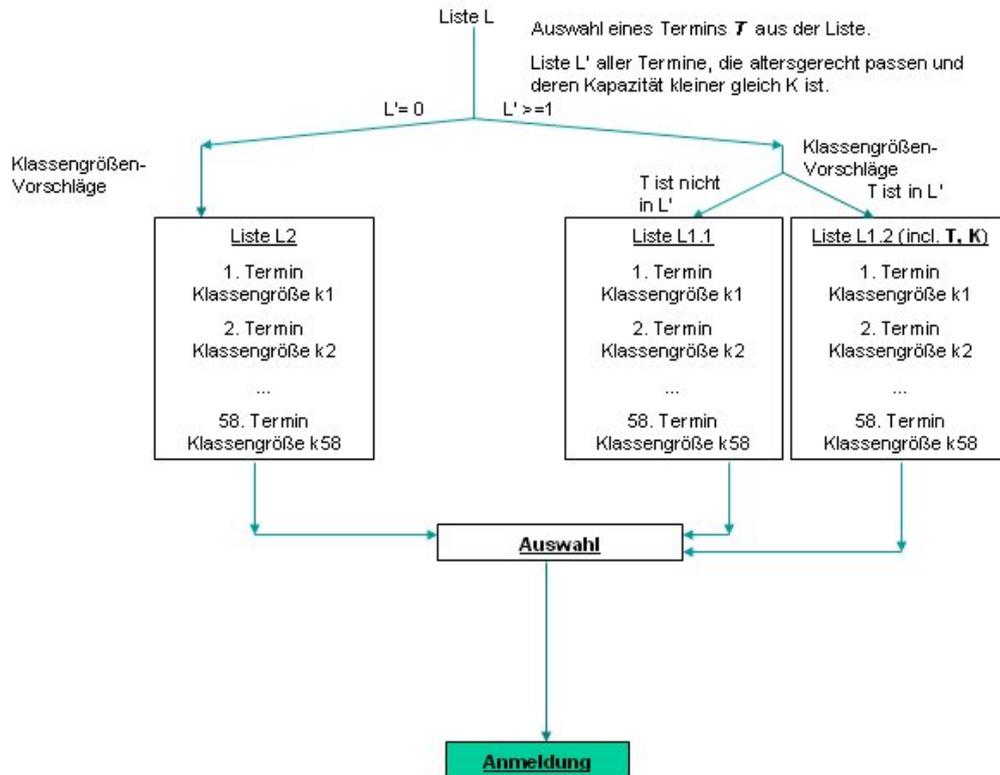


Abbildung 24: „KIP-Anmeldeprozess“

Betrachte den Fall, dass  $L' \geq 1$  und  $T$  in  $L'$  ist. Wenn sich eine Klasse anmeldet, wird vorher eine Rechnung des KIP-Modells mit den bisher angemeldeten Klassen durchgeführt. Der Zielfunktionswert gibt die Optimalzuordnung an. Anschließend wird das KIP-Modell mit der Klasse gerechnet. Beide Werte werden miteinander verglichen, um daraus eine Zuteilungswahrscheinlichkeit für die mögliche Zuteilung der Klasse abzuleiten. Je höher der neue Wert der Zielfunktion, desto höher wird die Wahrscheinlichkeit. Um die Klassen auf die nicht ausgelasteten Termine gleichmäßig zu verteilen, ist es wichtig die Information auszugeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit die gleiche Klasse auch den anderen Terminen zugeteilt werden würde. Es wird dann die Annahme getroffen, dass sich die Klasse für jeden der anderen kapazitätsmäßig passenden Termine anmelden würde. Das KIP-Modell wird danach für jeden der Termine erneut gerechnet.

Allerdings würden  $L1.1$  und  $L1.2$  nur die Zuteilungswahrscheinlichkeit zu den passenden Terminen ( $L'$ ) enthalten. Die restlichen Termine  $L/L'$  sind für die angegebene Klassengröße zu klein und werden nicht betrachtet. Sinnvoll wäre es, sie nicht auszuschließen und sie stattdessen auch einer Modellrechnung mit einer anderen Klassengröße zu unterziehen. Wie bei der GAP-Rechnung werden alle möglichen Klassengrößen zwischen der minimalen Klassengröße von fünf und nach oben durch die wirkliche Klassengröße bzw. andernfalls durch die Terminkapazität begrenzt, berücksichtigt. Dies geschieht um

den besten Vorschlag für jeden der Termine zu erhalten. Es wird für jeden der Termine die Klassengröße, mit der die größte Wahrscheinlichkeit erzielt wird, ausgesucht. Also enthält die Liste  $L1.2$  alle Termine entweder mit der originalen Klassengröße oder einen alternativen reduzierten Klassengrößenvorschlag. Damit der Anmelder bei  $L' \geq 1$  und  $T$  in  $L'$  seinen Termin auch wiederfindet, ist dieser in der Liste farblich hervorzuheben. Die Kriterien sind diesmal die größte Wahrscheinlichkeit und Klassengröße (möglichst nah an  $K$  dran). Alle Ergebnisse werden dementsprechend in der Liste  $L1.2$  absteigend nach der Wahrscheinlichkeit sortiert.

Für den Fall, dass  $L'$  den Termin  $T$  nicht enthält, wird im Vergleich zu  $L1.2$  in  $L1.1$  für den Termin  $T$  nur eine kleinere Klassengröße vorgeschlagen.  $T$  wird in der Liste  $L1.1$  so behandelt werden wie alle anderen Termine, absteigend sortiert mit Vorschlägen ( $k_i < K$ ) für die Klassengrößen und der Angabe der Zuordnungs-Wahrscheinlichkeit. Die Liste  $L1.1$  enthält also alle Termine mit einer geänderten Klassengröße (auch den Termin  $T$ ).

Betrachte zum Schluss den Fall, dass  $L'=0$ .

Hier ist der Unterschied, dass alle Termine in  $L2$  eine geänderte Klassengröße als Vorschlag aufweisen. Also kein Termin hat als Vorschlag die echte Klassengröße  $K$ .

Die letzte Idee liefert insgesamt aussagekräftigere Informationen während der Anmeldung für die End-Zuordnung. Die Information, die ausgegeben wird, wird auf Basis des KIP-Modells gewonnen und ist deswegen repräsentativer im Vergleich zu der GAP-Idee. Es findet damit eine Berücksichtigung aller Modell-Bedingungen statt, da gleich mit den End-Daten die Optimalzuordnung mit dem KIP-Modell gerechnet wird. Also bekommen die Klassen bei ihrer Anmeldung zu diesem Zeitpunkt die best möglichen Vorschläge unter Berücksichtigung aller Bedingungen. Mit dieser Modellrechnung werden auch die nicht ausgebuchten Termine genutzt und gleichzeitig Informationen vermittelt, um mehrere Termine anbieten zu können.

Für die maximal mögliche Anzahl von Terminen, die eine Klasse auswählen darf, wird eine Anmeldung abgeschickt.

### 7.1.2 Organisation der Optimierung

Als nächstes wird der Ablauf der Optimierung erläutert.

Als Anmeldezeitraum werden 3 Tage festgelegt. Erfahrungsgemäß erfolgen zwei-drittel der Anmeldungen am ersten Tag. Ein längerer Zeitraum ist dadurch nicht notwendig oder vorteilhaft.

Nachdem die Daten bestmöglich erfasst und bereinigt worden sind, beginnt die tatsächliche Optimierung der Zuteilungen von Klassen zu den Terminen.

Für das Kinder-Uni-Problem bietet sich eine „Zwei-Runden-Optimierung“ an. Sinnvoll werden nur zwei Optimierungsschritte erfolgen, da somit der Aufwand zu groß ist. Ein Schritt während des Anmeldeprozesses, zur Tendenzberechnung und ein Schritt mit den endgültigen End-Daten als End-Zuordnung. Mehrere Rechnungen führen zu unterschiedlichen Zuordnungen, die nicht repräsentativ sind, da sich die Anmeldungen stündlich ändern. Richtig ist, eventuell den Zeitpunkt so zu bestimmen, dass die erste Modellrechnung wichtige Erkenntnisse liefert.

Der relevante Zeitpunkt wird als DP (Decision-Point) definiert. Der DP kann beispielsweise durch Orientierung an dem Durchschnittswert der Anmeldungen vorangegangener Jahre bestimmt, d.h. bei mindestens 50% erfolgter Anmeldungen oder bei einer bereits 50%-tigen Belegung der Termine, ausgewählt werden.

Der genaue Ablauf der Optimierung des Anmeldeprozesses der FU-Kinder-Uni wird folgendermaßen realisiert:

- SP(Start-Point)  
Ab dem Beginn des Anmeldezeitraums, also ab dem SP (Start-Point) gehen die Anmeldungen im System ein.
- DP (Decision-Point)-Erste Optimierungsrunde: Modell-Rechnung  
Falls nötig können neue zusätzliche Bedingungen im Modell hinzugefügt werden, um eventuelle neu definierte Einschränkungen zu berücksichtigen.  
Die Modell-Rechnung beinhaltet zum einen die Lösung des Problems mit den vorhandenen Daten und zum anderen das automatisierte Rechnen sämtlicher Analysen.  
Alle Statistiken zur Auswertung der Zuordnung werden ausgegeben. Die wichtigste Analyse ist die Zielfunktionsanalyse, die die Zuordnungsvarianten bei maximaler Teilnehmerzahl bzw. maximal möglicher Schulanzahl liefert. Die Ergebnisse werden zur Übersicht in einem Diagramm graphisch dargestellt. Nachfolgend wird die Single-Knapsack-Schranke bestimmt, um die nutzbare Kapazität der Kurse zu berechnen. Der Idealfall, dass alle zur Verfügung stehenden Plätze vollständig besetzt werden können, ist in der Praxis nicht erreichbar. Durch die Struktur der Daten wird immer ein „Fehler“ vorkommen, so dass keine Kombination der angemeldeten Klassen exakt der zugrundeliegenden Terminkapazität zugeteilt werden kann.  
Als nächstes kann die Einzelterminanalyse durchgeführt werden zur Bestimmung der potentiell stärksten Termine, die den größten „Zusatzgewinn“ an Schülern zur

Folge haben und die damit für eine mögliche Kapazitätserhöhung in Frage kommen. Mit diesen gezielten Kapazitätserhöhungen wird der Zielfunktionswert verbessert, was in Kapitel 5 gezeigt wurde.

- FP (Finish-Point)- Zweite Optimierungsrunde: Modell-Rechnung (End Ergebnis)  
Auf Wunsch des Auftragsgebers ist es möglich eine Gesamtkapazitätserhöhung  $U$  zur weiteren Analyse der Veränderung der Raumgröße, Kapazitäten zu definieren. Ausgehend von einer tolerierten Kapazitätserhöhung  $U$  kann der mögliche maximale Zielfunktionswert berechnet werden.

Hier nochmal die Einzelschritte der Optimierung:

DP:

KIP-Modell rechnen

KIP Modell der verschiedenen Zielfunktionsvarianten rechnen

KIP<sup>J,U</sup>-Modell rechnen

KIP<sup>j,e</sup>,  $\forall j \in J$  und  $e \in [1, 10]$

SKS des Modells berechnen

FP-Ende des Anmeldezeitraums:

KIP-Modell rechnen

KIP Modell der verschiedenen Zielfunktionsvarianten rechnen

KIP<sup>J,U</sup>-Modell rechnen

KIP<sup>j,e</sup>,  $\forall j \in J$  und  $u \in [1, 10]$

SKS des Modells berechnen

Eventuell Nachoptimierung

Die Lösung des Zuordnungsproblems wird in die Datenbank integriert und wieder über einen Link vermittelt. Im Fall einer Absage soll auf Wunsch eine automatische Begründung mitgeteilt werden. Zu diesem Zweck kann zusätzlich eine Nachoptimierung der nicht zugeordneten Klassen durchgeführt werden, woran zu sehen ist, dass die ausgewählte Zuordnung schon eine „optimale“ Zuordnung ist.

## 7.2 Software-Aspekte

### Bisheriges Verfahren

Anschließend werden hier die Software-Aspekte und die organisatorischen Grundlagen zur bisherigen Abwicklung des Anmeldeprozesses der FU-Kinder-Uni als Basis für das KIP-Modell erläutert.

Die Anmeldeinformationen werden über die Webseite <http://fukinderuni.de/index.html> erfasst.

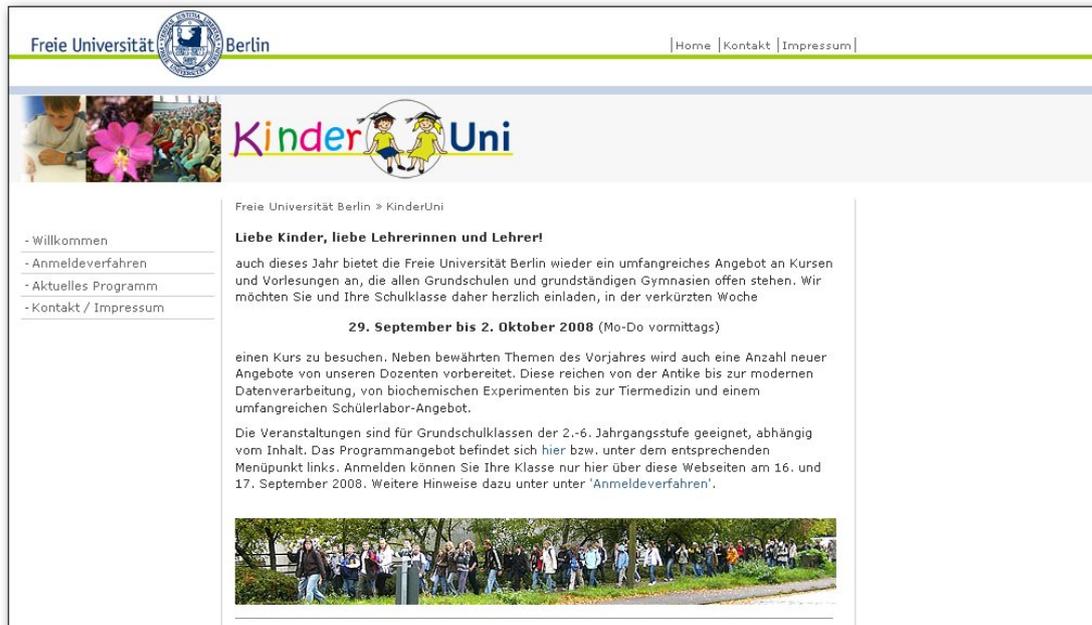


Abbildung 25: Web-Seite der FU-Kinder-Uni

Sämtliche Informationen zur Durchführung und Abwicklung der Anmeldungen stehen dort zur Verfügung. Bei der Anmeldung soll der Eignungsgrad der Kurse für die verschiedenen Jahrgangsstufen eingehalten werden. Durch die Auswahl eines Kurses aus dem Programm beginnt die Anmeldung. Weiter werden die restlichen Angaben, wie Schule, Klassengröße, Name usw. getätigt. Es besteht eine Einschränkung bei der Anmeldung auf zwei Kurse, zu denen jeweils ein Wunsch- und ein Ausweichtermin genannt werden können. Nach durchgeführter Anmeldung wird automatisch an die angegebene E-Mail-Adresse eine Anmeldebestätigung, die auf ihre Richtigkeit zu überprüfen ist, verschickt. Dabei wird auch eine individuelle Webadresse(Link) mitgeteilt, auf der die konkrete Klasse Zugriff auf alle für sie relevanten Informationen hat. Diese Adresse dient u.a. auch dazu mitzuteilen, dass der gewünschte Kurs überbucht ist, aber andere Kurse noch freie Plätze aufweisen. Es wird über diese alternativen Kurse informiert.

### Verwaltung der Datenbank

Die online erfassten Daten werden in einer Datenbank verwaltet. Dort werden die einzelnen Anmeldungen mittels eindeutiger Schlüssel gespeichert, wie beispielsweise:

- *token\_registration*-(eindeutige id) ist definiert durch die *Schul\_id*, Lehrername und Klassenname eine Klasse.
- *kuni\_registration\_id* ist die Identifikationsnummer der Anmeldungen.
- Identifikationsnummer für Schulen, Kurse, Zeiten (Kursnummer und Datum) und Veranstaltungsorte.
- Alle zusätzlichen Informationen wie Dauer eines Kurses, Name einer Schule usw. sind zugeordnet.

Entsprechend werden Meldungen verschickt zur Lenkung der Aufmerksamkeit auf diesen und evtl. zur Aufforderung zu neuen Anmeldungen, die die Wahrscheinlichkeit für eine Teilnahme erhöhen.

Benachrichtigungen begleiten den ganzen Anmeldeprozess. Es werden Alternativvorschläge vermittelt und die Ergebnisse bekannt gegeben.

#### Bereinigung der Daten

Es kommt immer vor, dass Daten nicht ordnungsgemäß in die Online-Maske eingetragen werden. Teilweise passiert das durch Missverständnisse, teilweise bewusst um den Prozess zu eigenen Gunsten zu beeinflussen. Da „Tippfehler“ nicht durch die Software vermieden werden können, erfolgt nach der Erfassung der Daten ihre Bereinigung (Entfernung von doppelten Anmeldungen und evtl. Duplikaten), um so eine faire Grundlage zu schaffen. D.h. eine komplette Prüfung der Daten auf Plausibilität zur End-Daten-Bestimmung wird durchgeführt. Die so gewonnenen Daten bilden die Eingabedaten für das KIP-Modell.

Hier eine Zusammenfassung der aktuell bestehenden Software-Probleme:

- Falsche Eingaben durch die Anmelder nicht vollständig ausgeschlossen (nicht eindeutige Identifikation).
- Mehrere Anmeldungen von der gleichen Klasse durch geänderte Angaben, (wie Lehrer, Klassen, Emailadressen). möglich und somit das bewusste oder unbewusste Erhalten von mehr als vier Anmeldungen.
- Klassengrößen können mit der Kapazität des angemeldeten Termins nicht kompatibel (d.h. zu groß) sein.
- Keine Online-Informationsausgabe über Zuteilungschancen während der Anmeldung.
- Wenig Service während der Anmeldung.

Als nächstes werden Überlegungen diskutiert und Veränderungen zur eindeutigen Datenerfassung im Layout vorgeschlagen.

Die Erfassung der Daten soll weiterhin ausschließlich über ein Anmeldetool erfolgen. Zur besseren Übersicht werden nach Erfahrung eine Anzahl von Auswahlfeldern (frames) bestimmt. Die Einschränkung der Anmeldung auf explizit zwei Kurse mit Alternativterminen muss nicht mehr wie bisher vorhanden sein, da bei der Optimierung der Zuteilung alle Kombinationen durchlaufen werden. Zur besseren Auslastung der Kurse ist die Möglichkeit zur Anmeldung verschiedener Kurse entscheidend. Die Formate der einzelnen Eingabe-Felder sollen so definiert sein, dass möglichst falsche Einträge verhindert werden. Das große Problem, der Erhalt von absolut eindeutigen Daten kann leider nicht vollständig gewährleistet werden. Die verwendeten Klassennamen, Lehrernamen, Emailadressen können Tippfehler enthalten, bzw. auf andere Schreibweise angegeben worden sein. Dadurch wird die eindeutige Identifikation der einzelnen Klassen erschwert. Die Überlegung einheitliche Eingabefelder, wie ein Feld für die Klassenstufe (2 bis 6) und ein Textfeld für den Namen anzugeben, ist nicht ausreichend, da die Anmeldeangaben für die Klassennamen sehr verschieden sind. Zum Beispiel Adler, Klasse4/5/6, Jül5/6, 4a usw. Es werden sowohl einzelne Klassen, als auch Zusammenstellungen aus verschiedenen Klassen, angemeldet. Eine Abdeckung im Layout ist auch dafür nicht so leicht durchführbar.

Eine Möglichkeit ist das Eliminieren der Leerzeichen in dem ausgelesenen Identifikations-Token für die Klassen in der Datenbank. Dadurch werden einige Fälle, die zu gleichen ID's führen, abgedeckt. Es ist aber trotzdem von Vorteil ein Tool zu implementieren, das automatisch alle eingegangenen Daten nach doppelten Einträgen und anders geschriebenen gleichen Klassen (5a, 5-, 5/a usw.) aus einer Schule usw. kontrolliert und auflistet. Es bleibt eine manuelle Überprüfung unausweichlich. Nach erfolgter Prüfung gehen die End-Daten als Basis für die Optimierung ein.

Im Allgemeinen muss die Richtigkeit der Daten angenommen werden. Wenn eine Klasse sich mit nicht existierenden Namen anmeldet ( z.B. 5f, wobei es nur Klassen aus einem Jahrgang a,b und c gibt), kann dies nicht überprüft werden. Die Idee, eine Verwaltung aller wirklich existierenden Klassen aus allen Schulen, ist einfach nicht möglich, besonders da sich die Klassennamen von Jahr zu Jahr ändern können und ein solches Update nicht vorhanden ist, bzw. zu viel Aufwand betrieben werden müsste, um diese Daten zu erheben. Die Klassen haben letztendlich viele Möglichkeiten, den Prozess zu manipulieren. Aufwand und Nutzen sollten aber auch bei der Datenerfassung in einem sinnvollen Verhältnis zueinander stehen.

Um gegen eine Manipulation der Angaben zu steuern, muss die Information vermittelt werden, dass auf eine strikte Einhaltung der gemachten Angaben zur Klassengröße geachtet wird. Es bringt nichts, später zur Veranstaltung mit mehr Schülern zu kommen, da die Plätze begrenzt sind. Ein solches nicht faires Verhalten wird ggf. mit einem negativen Bonus für das nächste Jahr „bestraft“. Gleichzeitig wird empfohlen jedes Jahr Verbesserungen nach neuem Erkenntnisgewinn einzubauen.

Durch die EDV-Verwaltung der Anmeldedaten und Zuteilungen seit 2007 stehen Zuordnungs-

Statistiken zur Verfügung. Somit kann nach und nach die Teilnahme aller Schulen in einem gewählten Zyklus gewährleistet werden, was so auch wieder einer fairen Zuordnung gerecht wird.

## 8 Zusammenfassung der Arbeit

Diese Arbeit entstand am Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik in Berlin durch den Auftrag der Planung der FU-Kinder-Uni. Im Rahmen der Organisation wurden sämtliche Aspekte der Planung des Anmeldeprozesses der Kinder-Uni ausführlich betrachtet und erstmalig in einem Optimierungsmodell KIP formalisiert und anschließend ein Konzept für die Online-Planung vorgestellt.

Im Allgemeinen gehört die bearbeitete Aufgabe zur Klasse der NP-vollständigen Multiple-Knapsack-Probleme. Wegen der kleinen Dimension der Eingabedaten konnte mit Hilfe des entwickelten mathematischen KIP-Modells das Zuordnungsproblem der FU-Kinder-Uni durch SCIP gelöst werden.

Durch die Ergebnisse dieser Arbeit wurden Hilfsmittel und entsprechenden Analysen für eine optimierte Durchführung der Organisation dieser Veranstaltung dem Koordinator der FU-Kinder-Uni zur Verfügung gestellt. Die geschilderte komplexe Planungsaufgabe, die er bisher aufgrund seiner Erfahrung und durch die Nutzung eines halbautomatischen Zuordnungsverfahrens lösen musste, konnte durch die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit strukturiert und mittels mathematischem Verfahren optimiert werden. Dies gewährleistete das Erhalten von beweisbar optimalen Zuordnungen und eine bessere Transparenz der Ergebnisse. Außerdem besteht die Möglichkeit zur Generierung von Alternativzuordnungen und verschiedener Analysen, die den Koordinator bei der Planung unterstützen.

Wesentliches Ziel war das Testen der Praxistauglichkeit des mathematischen Ansatzes (KIP-Modell) und seine Überprüfung anhand der Anmeldedaten aus dem Jahr 2007 und unter realen Bedingungen 2008, wo eine multikriterielle Optimierung betrachtet wurde. Sowohl die Zuordnung des KIP-Modells mit den statischen Eingabedaten aus dem Jahr 2007 als auch die Zuordnung 2008 unter realen Bedingungen waren im Vergleich zu den Zuordnungen, die mit der bisherigen Vorgehensweise gewonnen wurden, viel besser und effizienter. Die diesjährige optimierte Zuordnung der Anmeldungen der FU-Kinder-Uni wurde dementsprechend in der Presse und auf verschiedenen Web-Seiten vorgestellt. Auch persönlich im Gespräch wurde eine sehr positive Bilanz seitens der Veranstalter gezogen.

Zum Schluss wurde noch die Online-Planung der Kinder-Uni betrachtet. Der gesamte Online-Anmeldeprozess der FU- Kinder-Uni soll in Zukunft noch effizienter bezüglich des Anmeldeverfahrens realisiert werden. Es wurde ein Konzept vorgestellt zur Einbettung des Optimierungsmodells KIP in den Anmeldeprozess, um damit eine bessere Grundlage für die tatsächliche Optimierung zu schaffen. So sind eine schnelle Bewertung von Zuordnungen, Kapazitätsanpassungen und eine flexible Planung möglich.

Durch die Optimierung konnten im Jahr 2008 ganze 28 neue Schulen mehr an der Veranstaltung teilnehmen.

## 9 Literaturverzeichnis

- [1] Kellerer, Pferschy, Pisinger (2004). Knapsack Problems 1-42, 285-316
- [2] Chandra Chekuri, Sanjeev Khanna (2006). A Polynomial Time Approximation Scheme for the Multiple Knapsack Problem
- [3] S. Martello, P. Toth (1990). Knapsack Problems: algorithms and computer implementation (<http://www.or.deis.unibo.it/knapsack.html>)
- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Kinder-Uni>
- [5] <http://www.uni-tuebingen.de/uni/qvo/kinderuni-2002/kinderuni-04.html>
- [6] Michael R. Garey, David S. Johnson (1979). Computers and Intractability. [MP9]
- [7] [www.ads.tuwien.ac.at/teaching/ws02/pferschy/approx\\_Folien1.pdf](http://www.ads.tuwien.ac.at/teaching/ws02/pferschy/approx_Folien1.pdf)
- [8] Alex S. Fukunaga, Richard E. Korf (2007). Bin Completion Algorithms for Multicontainer Packing, Knapsack, and Covering Problems, Journal of Artificial Intelligence Research 28, 393-429
- [9] Ehrgott, M (2000). : Multicriteria optimization
- [10] Pferschy, U, Schauer, J (2007). : The Knapsack Problem with Conflict Graphs
- [11] <http://www.tagesspiegel.de/zeitung/Sonderthemen;art893,2602947>
- [12] [http://www.fu-berlin.de/presse/publikationen/tsp/2008/ts\\_20080830/ts\\_20080830\\_52/index.html](http://www.fu-berlin.de/presse/publikationen/tsp/2008/ts_20080830/ts_20080830_52/index.html)
- [Gro2003] M. Grötschel. Vorlesungsskript "Graphen- und Netzwerkalgorithmen (ADM I)"
- [Gro2004] M. Grötschel. Vorlesungsskript "Lineare Optimierung (ADM II)"

**Abbildungsverzeichnis**

1	Kinder-Universitäten . . . . .	3
2	Logo der FU-Kinder-Uni . . . . .	4
3	Kursangebot der Kinder-Uni (2008) . . . . .	5
4	Anmelde-Statistik . . . . .	6
5	Planungsgraph der FU-Kinder-Uni . . . . .	14
6	MTM-Algorithmus . . . . .	24
7	Mulknep-Algorithmus . . . . .	27
8	Zuordnungen bei den Basis-Kapazitäten . . . . .	37
9	Zuordnungen bei einer Kapazitätserhöhung um 53 Plätze . . . . .	38
10	Differenzquotienten-Diagramm . . . . .	41
11	Zuordnungsvergleich-Kinder-Uni 2007 . . . . .	44
12	Zuordnungen bei verschiedenen Kapazitätserhöhungen U . . . . .	45
13	Zuordnungen bei verschiedenen Kapazitätserhöhungen e pro Termin . . . . .	46
14	Zuordnungen bei verschiedenen Kapazitätserhöhungen e pro Termin . . . . .	47
15	Single-Knapsack-Schranke/LPR-Schranke bei verschiedenen Kapazitätserhöhungen U . . . . .	49
16	Veränderungen des Zielfunktionswertes bei den $\hat{o}$ -Klassen . . . . .	52
17	Nachoptimierung für Klasse 19 . . . . .	53
18	Statistik der Zuordnung 2008 . . . . .	57
19	Zuordnungsvarianten 2008 . . . . .	58
20	Bezirksteilnahme 2008 . . . . .	58
21	Untersysteme mit einem „Eins-zu-Eins-Austausch“ . . . . .	60
22	Untersystem für Klassen 17, 94 und 245 . . . . .	61
23	„GAP-Anmeldeprozess“ . . . . .	66
24	„KIP-Anmeldeprozess“ . . . . .	69
25	Web-Seite der FU-Kinder-Uni . . . . .	73

**Tabellenverzeichnis**

1 Differenzquotienten der Termine 7, 26, 28, 45 und 76 . . . . . 45

## **10 Implementationen**